В. А. Васильев

Дополнительные главы топологии

Весенний семестр 2011 г.

Лекция 7. Спектральные последовательности.

Спектральная последовательность – это обобщение точной последовательности пары (X, Y), имеющей, как вы помните, вид

$$\cdots \to H_{i+1}(X,Y) \to H_i(Y) \to H_i(X) \to H_i(X,Y) \to H_{i-1}(Y) \to \dots \tag{1}$$

Такая точная последовательность применяется для вычисления групп $H_i(X)$ гомологий пространства X, если известны группы гомологий $H_i(Y)$, $H_i(X,Y)$ подпространства и факторпространства. В любом случае сразу понятно, что средняя группа $H_i(X)$ в некотором смысле "меньше" прямой суммы этих групп: она содержит подгруппу, изоморфную факторгруппе группы $H_i(Y)$, а ее фактор по этой подгруппе изоморфен некоторой подгруппе группы $H_i(X,Y)$.

На языке общей теории, пара (X, Y) называется двучленной фильтрацией. Произвольной (конечной) фильтрацией топологического пространства X называется вложенная последовательность подпространств

$$X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_N \equiv X.$$

Такая фильтрация[1] порождает фильтрацию в каждой группе $H_i(X)$, то есть последовательность вложенных подгрупп

$$H_i^{(0)}(X) \subset H_i^{(1)}(X) \subset \cdots \subset H_i^{(N)}(X) \equiv H_i(X): \tag{2}$$

подгруппа $H_i^{(p)}(X)$ – это образ естественного отображения $H_i(X_p) \to H_i(X)$, заданного вложением $X_p \to X$. Итог вычисления спектральной последовательности (если удастся провести это вычисление) — это не совсем группа $H_i(X)$, а соответствующая градуированная группа

$$\bigoplus_{p=0}^{N} H_i^{(p)}(X)/H_i^{(p-1)}(X), \tag{3}$$

где по определению $H_i^{(-1)}(X) = 0$. Эти группы, тем не менее, очень схожи: например, в случае гомологий с коэффициентами в поле они изоморфны, а для целочисленных гомологий совпадают их ранги.

Как и раньше, легко видеть, что каждое из слагаемых $H_i^{(p)}(X)/H_i^{(p-1)}(X)$ этой суммы в некотором смысле "не больше" соответствующей группы $H_i(X_p, X_{p-1})$. А именно, оно получается из этой (фактор)группы двумя операциями, каждая из которых может только уменьшить ее: уменьшением группы образующих и увеличением группы соотношений. Скажем это подробнее. Во-первых, среди элементов группы $H_i(X_p, X_{p-1})$ (по определению представляемых относительными циклами, то есть сингулярными i-цепями, граница которых лежит в X_{p-1}) мы должны выбрать только те, которые представимы не относительными, а настоящими циклами, граница которых просто равна 0. Во-вторых, если при определении группы $H_i(X_p, X_{p-1})$ мы факторизовали только по тем цепям, которые задаются границами $(i+1)$-мерных цепей, лежащих в X_p, то теперь нам надо объявить нулевыми все возможные границы любых $(i+1)$-цепей пространства X (или, если угодно, любых относительных цепей пары (X, X_{p-1}), поскольку все, что лежит в X_{p-1}, разумеется, никакой роли не играет).

[1]В высшей математике часто бывает полезно рассматривать и бесконечные фильтрации, но пока что давайте попробуем разобраться с конечными, а обобщение будет уже проще.

Часто бывает удобно совершить этот переход от групп $H_i(X_p, X_{p-1})$ к $H_i^{(p)}(X)/H_i^{(p-1)}(X)$ постепенно, используя нашу фильтрацию для определения промежуточных условий. А именно, при определении промежуточных групп $E^r_{p,i-p}$, $r = 1, \dots, \infty \leq N$, соединяющих эти группы, мы последовательно накладываем все более сильные условия (граница должна лежать в X_{p-1}, в $X_{p-2}, \dots,$ в X_{-1}) и все более сильные соотношения (факторизуем по границам цепей, лежащих в X_p, в $X_{p+1}, \dots,$ в X_N). Конечно, можно было бы сделать эти процедуры по очереди: сначала наложить все ограничения, постепенно усиливая их (то есть попросту вычислить факторгруппу группы $H_*(X_p)$ по подгруппе, реализуемой циклами, лежащими в X_{p-1}), а потом то, что получилось, профакторизовать по (все более сильным) соотношениям. Но экспериментальный факт состоит в том, что как правило эти процедуры полезно совершать одновременно, равномерно усиливая как условия, так и соотношения.

Кроме того, оказалось полезным ввести не совсем очевидную индексацию. Группы $H_i(X_p, X_{p-1})$ и $H_i^{(p)}(X)/H_i^{(p-1)}(X)$ соединяются последовательностью (уменьшающихся, или по крайней мере невозрастающих) групп, обозначаемых $E^r_{p,q}$, $r = 1, 2, \dots$, где $q = i - p$. Таким образом, спектральная последовательность — это последовательность табличек, занумерованных числами $r = 1, 2, \dots$; для каждого r соответствующая табличка — это набор абелевых групп, записанных в каждой точке $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$, лежащей либо где угодно в первом квадранте, либо выше диагонали в четвертом квадранте. Размерность i групп гомологий — это сумма $p + q$ координат точки. Например, все слагаемые группы (3) будут записаны на диагонали $\{(p, q) | p + q = i, p \geq 0\} \subset \mathbf{Z}^2$ для таблички E^∞; всякая же начальная группа $H_i^(X_p, X_{p-1}$ будет лежать на этой же диагонали для таблички E^1.

Теперь перейдем к точным определениям. Определим группы

$$E^0_{p,q} \equiv C_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \equiv C_{p+q}(X_p)/C_{p+q}(X_{p-1}). \tag{4}$$

Между этими группами действуют обычные граничные операторы комплексов $C_*(X_p, X_{p-1})$, которые в данных обозначениях связывают группы, изображаемые одна над другой: $\partial^0 : E^0_{p,q} \to E^0_{p,q-1}$. Все столбцы таблички $E^0_{*,*}$ при этом превращаются в комплексы, гомологии которых – это обычные относительные гомологии пары (X_p, X_{p-1}).

Определение 1. *Подгруппа $Z^r_{p,q} \subset E^0_{p,q}$ определяется как множество всех элементов $\alpha \in C_{p+q}(X_p)/C_{p+q}(X_{p-1})$, которые можно реализовать такими элементами $a \in C_{p+q}$, что $\partial a \in X_{p-r}$.*

Подгруппа $B^r_{p,q} \subset E^0_{p,q}$ — это множество всех элементов, реализуемых классами границ цепей, лежащих в X_{p+r-1}. Итак, элемент $\alpha \in C_{p+q}(X_p)/C_{p+q}(X_{p-1})$ (то есть смежный класс группы $C_{p+q}(X_p)$ по подгруппе $C_{p+q}(X_{p-1})$ принадлежит подгруппе $B^r_{p,q}$ если найдется $b \in C_{p+q+1}(X_{p+r-1})$ такой, что $\partial b \in \alpha$.

Очевидно,

$$Z^0_{p,q} \supset Z^1_{p,q} \supset Z^2_{p,q} \supset \dots \supset Z^\infty_{p,q} \supset B^\infty_{p,q} \supset \dots \supset B^2_{p,q} \supset B^1_{p,q} \supset B^0_{p,q}.$$

При этом по определению $Z^0_{p,q} = C_{p+q}(X_p)/C_{p+q}(X_{p-1})$, $B^0_{p,q} = 0$, $H^{(p)}_{p+q}(X)/H^{(p-1)}_{p+q}(X) = Z^\infty_{p,q}/B^\infty_{p,q}$.

Поэтому можно определить $E^r_{p,q}$ как факторгруппу $Z^r_{p,q}/B^r_{p,q}$. При $r = 0$ это определение согласовано с исходным обозначением $E^0_{p,q}$. Легко проверить также равенства

$$E^1_{p,q} \simeq H_{p+q}(X_p, X_{p-1});$$

как только что было отмечено,

$$E^\infty_{p,q} \simeq H^{(p)}_{p+q}(X)/H^{(p-1)}_{p+q}(X).$$

Рассмотрим например трехчленную фильтрацию $X_0 \subset X_1 \subset X_2 = X$. Три строки ее члена E^1, соответствующие значениям $q = t-2, t-1$ и t состоят из групп, записанных в следующей таблице:

$$
\begin{array}{r|lclcl}
q = t & H_t(X_0) & \leftarrow & H_{t+1}(X_1, X_0) & \leftarrow & H_{t+2}(X_2, X_1) \\
q = t-1 & H_{t-1}(X_0) & \leftarrow & H_t(X_1, X_0) & \leftarrow & H_{t+1}(X_2, X_1) \\
q = t-2 & H_{t-2}(X_0) & \leftarrow & H_{t-1}(X_1, X_0) & \leftarrow & H_t(X_2, X_1) \\
\hline
 & p = 0 & & p = 1 & & p = 2
\end{array} \tag{5}
$$

Стрелки, изображенные в этой же таблице, — это граничные операторы точных последовательностей тройки (X_2, X_1, X_0) и пары (X_1, X_0) (которую для единообразия здесь удобно рассматривать также как тройку $(X_1, X_0, \emptyset)$.

Эти стрелки (и аналогичные стрелки для произвольной спектральной последовательности, порожденной фильтрацией) превращают каждую строчку члена E^1 в цепной комплекс. Например, если X — CW-комплекс, и наша фильтрация – это фильтрация остовами, то все ненулевые элементы $E^1_{p,q}$ члена E^1 лежат только в строчке $q = 0$ и эта строчка представляет собой в точности клеточный комплекс этого пространства, в частности его гомологии — это клеточные гомологии нашего пространства. Легко посчитать, что для произвольной спектральной последовательности и любых p, q группа гомологий этого комплекса, происходящая из члена $E^1_{p,q}$, естественно изоморфна определенной выше группе $E^2_{p,q}$.

Теперь посмотрим, что происходит с диаграммой (5) на следующем шаге спектральной последовательности. После действия ее горизонтальных стрелок, то есть дифференциалов из точных последовательностей троек, остаются следующие группы гомологий соответствующих комплексов:

$$
\begin{array}{r|lll}
q = t & \frac{H_t(X_0)}{\partial(H_{t+1}(X_1,X_0))} & \frac{\ker \partial(H_{t+1}(X_1,X_0))}{\partial(H_{t+2}(X_2,X_1))} & \ker \partial(H_{t+2}(X_2, X_1)) \\
q = t-1 & \frac{H_{t-1}(X_0)}{\partial(H_t(X_1,X_0))} & \frac{\ker \partial(H_t(X_1,X_0))}{\partial(H_{t+1}(X_2,X_1))} & \ker \partial(H_{t+1}(X_2, X_1)) \\
q = t-2 & \frac{H_{t-2}(X_0)}{\partial(H_{t-1}(X_1,X_0))} & \frac{\ker \partial(H_{t-1}(X_1,X_0))}{\partial(H_t(X_2,X_1))} & \ker \partial(H_t(X_2, X_1)) \\
\hline
 & p = 0 & p = 1 & p = 2
\end{array} \tag{6}
$$

Посмотрим, например, на ее верхнюю левую клетку $E^2_{0,t} = \frac{H_t(X_0)}{\partial(H_{t+1}(X_1,X_0))}$. В силу точной последовательности пары (X_1, X_0) это в точности вклад группы $H_t(X_0)$ в группу $H_t(X_1)$, то есть подгруппа в $H_t(X_1)$, порожденная циклами, лежащими в X_0. Но, возможно, не вся эта подгруппа целиком превращается в аналогичную подгруппу в $H_t(X_2)$: может случиться, что некоторые ее нетривиальные элементы (задаваемые циклами, не гомологичными 0 в X_1) окажутся гомологичны 0 в X_2. Последнее условие для элемента a нашей группы состоит в том, что найдется относительный $(t+1)$-мерный цикл в X_2 по модулю X_0, граница которого гомологична элементу a. Теперь заметим, что группа относительных $(t+1)$-мерных циклов пространства X_2 по модулю X_0 закодирована в правой средней клетке $E^2_{2,t-1} = \ker \partial(H_{t+1}(X_2, X_1))$ этой же таблицы. Корректно определен гомоморфизм между этими клетками: $\partial_2 : E^2_{2,t-1} \to E^2_{0,t}$: всякому относительному циклу в X_2 по модулю X_0 ставится в соответствие его граница, а затем производятся всевозможные факторизации (то есть мы берем класс этой границы в надлежащей факторгруппе, и более того рассматриваем его не просто как образ нашего относительного цикла, а как образ содержащего его смежного класса — в данном случае по модулю всех цепей подпространства $X_1 \subset X_2$; при этом необходимо проверить, что результат не зависит от выбора представителя этого смежного класса). Искомая подгруппа $H_t^{(0)}(X) \subset H_t(X)$ — это факторгруппа группы $E^2_{0,t}$ по образу этого гомоморфизма. С другой стороны, не менее искомая группа $H^{(2)}_{t+1}(X)/H^{(1)}_{t+1}(X)$ (измеряющая добавок группы $H_{t+1}(X)$ по сравнению с подгруппой, порожденной циклами, лежащими в X_1) — это в точности ядро этого же гомоморфизма ∂_2. Окончательно, сделаем над табличкой (6) следующие преобразования: все клетки $E^2_{0,q}$ профакторизуем по образу этого гомоморфизма $\partial_2 : E^2_{2,q-2} \to E^2_{0,q}$, а все клетки $E^2_{2,q}$ заменим на ядра этих же гомоморфизмов. Группы $E^2_{1,q}$ оставим неизменными. Полученные во всех этих местах клетки обозначим соответственно через $E^3_{0,q}$, $E^3_{2,q}$ и $E^3_{1,q}$, а всю табличку, состоящую из этих групп $E^3_{p,q}$ – через E^3. Эта табличка и является искомой табличкой, дающей нам градуированную группу (3).

К сожалению, все так просто только в случае трехчленной фильтрации. В общем случае мы точно так же получаем систему гомоморфизмов $\partial_2 : E^{p,q} \to E^{p-2,q+1}$ для всех возможных p, q. Действительно, группа $E^2_{p,q}$ по определению (см. стр. 2) порождена относительными циклами в X_p по модулю X_{p-2}. Для всякого элемента A этой группы, реализуем ее таким относительным циклом и возьмем его граница. Эта граница — абсолютный цикл в X_{p-2}; его смежный класс и определяет образ нашего элемента A под действием гомоморфизма ∂_2.

Эти дифференциалы ∂_2 превращают группу $E^2 \equiv \bigoplus_{p,q} E^2_{p,q}$ в цепной комплекс: композиция операторов $\partial_2 \circ \partial_2 : E^2_{p+2,q-1} \to E^2_{p-2,q+1}$ очевидно равна нулю.

Теорема 1. *Группа гомологий этого комплекса, связанная с клеткой $E_{p,q}$ (то есть ядро оператора $\partial_2 : E^2_{p,q} \to E^2_{p_2,q+1}$, профакторизованное по образу оператора $\partial_2 : E^2_{p+2,q-1}$) совпадает с группой $E^3_{p,q}$, определенной на стр. 2.*

Доказательство сводится к раскрытию определений.

Точно так же определяются все следующие дифференциалы $\partial_r : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$, и группы гомологий каждого такого комплекса $\{E^r\}$ оказываются совпадающими со следующей группой E^{r+1}.