В. А. Васильев

Дополнительные главы топологии

Весенний семестр 2011 г.

Лекция 5. Главные и универсальные расслоения

Пусть G – топологическая группа (то есть группа со структурой топологического пространства, причем обе групповые операции оказываются непрерывными отображениями).

Определение 1. *Главное G-расслоение — это локально тривиальное расслоение $E \to B$ с эффективным действием группы G на E (то есть для любых $x \in E, g \in G$ имеем $g(x) = x \Leftrightarrow g = 1$) таким что орбиты этого действия совпадают со слоями расслоения. (Иными словами, база расслоения может рассматриваться как факторпространство по действию этой группы). По определению, слои этого расслоения гомеоморфны G.*

Главные расслоения редко встречаются сами по себе, но их часто бывает удобно рассматривать в связи с другими расслоениями и прочими структурами.

Пример 1. *С любым m-листным накрытием $p : X \to Y$ связано главное $S(m)$-накрытие, слой которого над точкой $y \in Y$ – это всевозможные упорядоченные наборы точек слоя $p^{-1}(y)$.*

Более общим образом, пусть есть локально тривиальное расслоение $p : X \to Y$ со слоем, гомеоморфным фиксированному пространству F (хотя, как обычно, этот гомеоморфизм не фиксирован). Тогда с этим расслоением ассоциировано главное $\mathrm{Homeo}(F)$-расслоение: слой его над точкой $y \in Y$ — это множество всевозможных гомеоморфизмом из стандартного пространства F в слой $p^{-1}(y)$.

Часто рассматриваются т.н. *расслоения со структурной группой* $G \subset \mathrm{Homeo}(F)$, у которых функции склейки над пересечениями координатных окрестностей — это отображения из этих пересечений не в группу всех гомеоморфизмов F, а в ее подгруппу G. Например, любое векторное n-мерное расслоение — это расслоение со слоем $\mathbf{R}^n$ и структурной группой $GL(\mathbf{R}, n) \subset \mathrm{Homeo}(\mathbf{R}^n)$. Аналогично, ориентированные, или евклидовы, или комплексные векторные расслоения – это соответственно расслоения со структурной группой $SL(\mathbf{R}, n)$ или $O(n)$, или $GL(\mathbf{C}, n)$. С каждым таким расслоением естественно связано главное G-расслоение с соответствующим G.

Если $E \to B$ — главное G-расслоение и $B' \to B$ — произвольное непрерывное отображение, то индуцированное расслоение над B' также оказывается главным G- расслоением.

Пусть теперь топологическая группа G фиксирована. В классе всех главных G-расслоений имеется т.н. *универсальное G-расслоение*, к которому сводятся все остальные.

Теорема 1. *Для любой топологической группы G, являющейся CW-комплексом, существует главное G-расслоение CW-комплексов $EG \to BG$ такое, что*

1) его тотальное пространство EG гомотопически тривиально;

2) любое главное G-расслоение π над произвольной базой B' эквивалентно расслоению, индуцированному из универсального расслоения $EG \to BG$ некоторым отображением баз $B' \to BG$. Последнее отображение однозначно (с точностью до гомотопии) определяется исходным расслоением π и обозначается $cl(\pi)$. В частности, классы эквивалентности главных G-расслоений над B' находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с гомотопическими классами отображений $B' \to BG$.

Такое расслоение $EG \to BG$ называется *универсальным* G-расслоением, а BG — *классифицирующим пространством* G-расслоений.

Условия 1) и 2) теоремы эквивалентны; любое из них может служить определением универсального расслоения.

Следствие 1. *Классифицирующее пространство BG однозначно определяется группой G с точностью до гомотопической эквивалентности.*

0.1. **Примеры.** 1. Если группа G дискретна, то универсальное расслоение $EG \to BG$ — это в точности универсальное накрытие над пространством $K(G, 1)$.

2. Если $G = S^1$, то в качестве универсального расслоения можно взять бесконечномерное расслоение Хопфа $\lim_n S^{2n+1} \to \mathbf{C}P^n$.

3. Для произвольной топологической группы G универсальное расслоение вновь задается конструкцией Милнора с помощью джойнов. А именно, надо взять джойн n экземпляров самой группы G. Группа G действует сама на себе (то есть на всех сомножителях этого джойна) левыми (например) сдвигами, и это действие по линейности продолжается на весь джойн. Это действие эффективно, а его тотальное пространство $(n-2)$-связно. Более того, такой стандартно вкладывается в джойн любого большего количества экземпляров G. Переходя к пределу по G (то есть рассматривая объединение всех таких вложенных друг в друга джойнов с действием G) получаем искомое расслоение.

4. Приведенная только что конструкция не всегда позволяет понять, как выглядит полученное классифицирующее пространство. В некоторых важных случаях намного полезнее другое его описание. Оказывается, например, что для группы $O(n)$ классифицирующее пространство — это грассманиан $G_n(\mathbf{R}^\infty)$ n-мерных плоскостей в бесконечномерном пространстве. А именно, для любого натурального k вложение $\mathbf{R}^{n+k} \to \mathbf{R}^{n+k+1}$ задает вложение $G_n(\mathbf{R}^{n+k}) \to G_n(\mathbf{R}^{n+k+1})$ $\mathbf{R}^{n+1}$. Объединение всех этих грассманианов – это и есть $G_n(\mathbf{R}^\infty)$. Аналогично, $BSO(n)$ — это бесконечный грассманиан ориентированных n-мерных плоскостей в $\mathbf{R}^\infty$, $BU(n)$ — грассманиан n-мерных комплексных плоскостей в $\mathbf{C}^\infty$. В этих трех случаях группы $O(n), SO(n), U(n)$ могут быть заменены на $GL(\mathbf{R}^n), GL^+(\mathbf{R}^n), GL(\mathbf{C}^n)$ соответственно.