В. А. Васильев

Дополнительные главы топологии

Весенний семестр 2011 г.

Лекция 2. Дополнительные сведения по гомотопической топологии

Сегодня мы пройдем несколько новых теорем из гомотопической топологии, необходимых для дальнейшего. Все они без труда проверяются с помощью той техники, которая уже рассказывалась ранее. Подробные доказательства см. в книге Фоменко–Фукса "Курс гомотопической топологии".

1. Аддиционная теорема

Что происходит с гомотопическими группами топологического пространства при приклеивании клеток? В отличие от групп гомологий, здесь удается сказать не так много (особенно про высокомерные группы). Во всяком случае, верно следующее.

Пусть X — топологическое пространство. Приклеим к X диск D^{n+1} по отображению его границы $f : S^n \to X$, т.е. рассмотрим пространство $X \bigcup_f D^{n+1}$.

Теорема 1. *При $i < n$ тождественное вложение $X \hookrightarrow X \bigcup_f D^{n+1}$ индуцирует изоморфизм $\pi_i(X) \to \pi_i(X \bigcup_f D^{n+1})$. А при $i = n$ индуцированное отображение гомотопических групп является эпиморфизмом. Ядро этого эпиморфизма устроено следующим образом. Можно считать, что отмеченная точка лежит в образе f. Тогда класс сфероида $f : S^n \to X$ и классы всех сфероидов, сопряженных с ним посредством действия фундаментальной группы $\pi_1(X)$ на $\pi_n(X)$, лежат в ядре этого эпиморфизма и порождают это ядро.*

2. Слабая гомотопическая эквивалентность

С этим словосочетанием связаны два не всегда совпадающих друг с другом понятия. Напомним, что обычная гомотопическая эквивалентность определяется следующим образом: пространства X и Y гомотопически эквивалентны, если существуют отображения $X \to Y$ и $Y \to X$ (гомотопические эквивалентности), обе композиции которых гомотопны тождественным отображениям X и Y в себя. Итак, между гомотопически эквивалентными пространствами всегда существуют отображения, которые реализуют эту эквивалентность и на топологическом жаргоне сами называются гомотопическими эквивалентностями. Но между слабо гомотопически эквивалентными пространствами не всегда существует отображение, реализующее эту слабую гомотопическую эквивалентность.

Определение 1. *Отображение $\varphi : X \to Y$ называют* слабой гомотопической эквивалентностью, *если для любого CW-комплекса Z индуцированное отображение* $\Pi(Z, X) \to \Pi(Z, Y)$, *где* $\Pi(Z, X)$ *— множество классов гомотопически эквивалентных отображений, взаимно однозначно.*

Предложение 1. *Вместо любых CW-комплексов Z в этом определении можно ограничиться сферами, т.е. потребовать лишь, что индуцированное отображение $\pi_i(X) \to \pi_i(Y)$ должно быть изоморфизмом при всех i.*

Определение 2. *Пространства X и Y* слабо гомотопически эквивалентны, *если для любого CW-комплекса Z существует взаимно однозначное соответствие* $\Pi(Z, X) \leftrightarrow \Pi(Z, Y)$, *причем оно функториально по Z.*

Функториальность здесь означает следующее. Отображение $f : Z \to Z'$ индуцирует диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Pi(Z,X) & \leftrightarrow & \Pi(Z,Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi(Z',X) & \leftrightarrow & \Pi(Z',Y), \end{array}$$

в которой горизонтальные стрелки — это соответствия из предыдущего определения. Эта диаграмма должна быть коммутативна. Точно так же, как и в предыдущем случае, эквивалентное определение получится, если ограничиться существованием функториальных взаимно однозначных соответствий гомотопических групп.

Второе понятие слабой гомотопической эквивалентности полезно из-за того, что слои расслоения в смысле Серра слабо гомотопически эквивалентны.

Напомним, что отображение $p : E \to B$ называют *расслоением в смысле Серра*, если оно обладает свойством накрывающей гомотопии для любых отображений (и их гомотопий) любых CW-комплексов в E и B.

Важный пример: отображение Серра $p : E \to B$, где E — пространство всех путей $\phi : [0,1] \to B$, переводящих точку $0 \in [0,1]$ в отмеченную точку $b \in B$, а отображение p любому такому пути ϕ сопоставляет его конец $\phi(1)$.

Из определения расслоения в смысле Серра (т.е. из свойства накрывающей гомотопии) над линейно связной базой немедленно следует, что его слои слабо гомотопически эквивалентны. Однако этот факт вообще говоря не задается никаким отображением между этими слоями (впрочем, если эти слои сами являются CW-комплексами или гомотопически эквивалентны им, то такое отображение существует и задается гомотопией тождественного отображения слоя в себя.)

Теорема 2. (Уайтхеда). *Для CW-комплексов понятия слабой гомотопической эквивалентности и обычной гомотопической эквивалентности совпадают.*

Предложение 2. *Слабая гомотопическая эквивалентность двух пространств индуцирует изоморфизм всех групп гомологий.*

Иными словами, если отображение $f : X \to Y$ при всех i индуцирует изоморфизмы $f_* : \pi_i(X) \to \pi_i(Y)$, то оно при всех i индуцирует изоморфизмы $f_* : H_i(X) \to H_i(Y)$ (для любой группы коэффициентов). При этом необходимо, чтобы гомотопические группы не просто были изоморфны, а их изоморфизм действительно индуцировался бы некоторым отображением.

3. Пространства $K(\pi, n)$

Пусть n — натуральное число, π — группа (абелева при $n > 1$). Топологическое пространство X называется пространством типа $K(\pi, n)$, если

$$\pi_i(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq n; \\ \pi & \text{при } i = n. \end{cases}$$

Теорема 3. *а) Для любых π и n существует клеточное пространство типа $K(\pi, n)$.*

б) Все пространства типа $K(\pi, n)$ (для данных π и n), имеющие тип CW-комплекса, слабо гомотопически эквивалентны между собой (а следовательно, по теореме Уайтхеда, и гомотопически эквивалентны в обычном смысле).

Утверждение а) доказывается при помощи аддиционной теоремы. Берем представление группы π в виде образующих и соотношений. Затем берем букет n-мерных сфер, количество которых равно числу образующих. Его группа π_n естественно совпадает со свободной группой (абелевой при $n > 1$), порожденной этими образующими. Для каждого соотношения в группе π берем n-мерный сфероид в этом букете, который порождает это соотношение, и приклеиваем $(n+1)$-мерный диск по этому сфероиду. В размерности n и меньше получаем нужную группу, но дальше могут идти нетривиальные гомотопические группы. Затем убиваем $(n+1)$-мерную гомотопическую группу, приклеивая $(n+2)$-мерный диск по каждой ее образующей (или, если угодно, вообще по любому элементу), и т.д. В младших размерностях гомотопические группы не изменяются.

Этот процесс построения пространства типа $K(\pi, n)$ неконструктивен: он не позволяет явным образом представлять себе это пространство. Однако уже исходя из определения таких пространств удается многое сказать о них, в частности достаточно эффективно вычислять их группы гомологий.

Вторую часть теоремы (гомотопическую единственность) мы докажем позже, с помощью теории препятствий.

Примеры пространств $K(\pi, n)$. Пространства типа $K(\pi, 1)$ можно строить с помощью следующей достаточно общей конструкции. Рассмотрим пространство X с тривиальными гомотопическими группами, на котором свободно действует дискретная группа π, т.е. $\forall g \in \pi$ и $\forall x \in X$ из равенства $g(x) = x$ следует, что $g = \mathrm{Id}$ — единичный элемент группы π. Пусть X/G — пространство орбит, снабженное фактортопологией. Возникает накрытие $X \to X/G$, слой которого можно отождествить с G (накрытия такого происхождения называются *главными* G-*накрытиями*). Точная гомотопическая последовательность этого накрытия $X \to X/G$ показывает, что X/G — пространство типа $K(\pi, 1)$.

Реализуем например пространство $K(\mathbf{Z}_2, 1)$. Рассмотрим семейство вложенных пространств

$$\mathbf{R}^1 \subset \mathbf{R}^2 \subset \mathbf{R}^3 \subset \dots$$

В каждом из них рассмотрим множества одномерных подпространств:

$$\mathbf{R}^0 \subset \mathbf{R}P^1 \subset \mathbf{R}P^2 \subset \dots$$

Объединение всех этих пространств называется бесконечномерным проективным пространством и обозначается $\mathbf{R}P^\infty$. Оно обладает стандартной структурой CW-комплекса, имеющего ровно по одной i-мерной клетке $\mathbf{R}^i \equiv \mathbf{R}P^i \setminus \mathbf{R}P^{i-1}$ в каждой размерности i. Эта структура задает на нем топологию, которая называется топологией прямого предела. Аналогично определяем S^∞ как объединение множеств

$$S^0 \subset S^1 \subset S^2 \subset \dots$$

единичных векторов в $\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^2, \dots$. Оно обладает структурой CW-комплекса с парой клеток $S^i \setminus \mathbf{R}^i$ в каждой размерности.

Имеется очевидное двулистное накрытие $S^\infty \to \mathbf{R}P^\infty$. Но ясно, что все гомотопические группы S^∞ тривиальны (в частности по теореме Уайтхеда это пространство стягиваемо).

Аналогично, пространство $K(\mathbf{Z}_n, 1)$ можно построить следующим образом. Рассмотрим вложенные пространства

$$\mathbf{C}^1 \subset \mathbf{C}^2 \subset \mathbf{C}^3 \subset \dots$$

и в них подмножества векторов единичной длины

$$S^1 \subset S^3 \subset S^5 \subset \dots$$

На каждой сфере в комплексном пространстве определено действие группы $\mathbf{Z}_n$: умножение на $e^{2\pi i/n}$. Фактор по этому действию, то есть соответствующее пространство $K(\mathbf{Z}_n, 1)$, называется линзовым пространством.

Если мы те же самые сферы

$$S^1 \subset S^3 \subset S^5 \subset \dots$$

профакторизуем по действию единичной окружности $|z| = 1$, то получим комплексное проективное пространство $\mathbf{C}P^\infty$.

Задача. Доказать, что $\mathbf{C}P^\infty$ — пространство типа $K(\mathbf{Z}, 2)$.

Еще два примера пространств типа $K(\pi, 1)$ дают пространства $F(\mathbf{R}^2, n)$ и $B(\mathbf{R}^2, n)$ упорядоченных и неупорядоченных наборов из n попарно различных точек на плоскости. Первое из этих пространств $n!$-листно накрывает другое.

Теорема 4. *Пространство $F(\mathbf{R}^2, n)$ является пространством типа $K(\pi, 1)$ для некоторой группы π.*

В силу точной последовательности накрытия, отсюда будет следовать аналогичное утверждение про $B(\mathbf{R}^2, n)$.

Доказательство теоремы проводится индукцией по n. А именно, имеется расслоение $F(\mathbf{R}^2, n) \to F(\mathbf{R}^2, n-1)$, сопоставляющее упорядоченному набору из n точек его первые $n-1$ элементов. Слой этого расслоения — плоскость $\mathbf{R}^2$ без $n-1$ точки, также являющаяся пространством $K(\pi, 1)$ для некоторой группы (а именно, для свободной группы с $n-1$ образующей). Теперь утверждение теоремы вытекает из точной последовательности расслоения.

Фундаментальные группы этих пространств называются соответственно *группой крашеных кос* и просто *группой кос* из n нитей.

Еще один похожий пример — пространство типа $K(S(n), 1)$, где $S(n)$ — симметрическая группа. На этот раз наборы различных точек берем не на плоскости, а в $\mathbf{R}^\infty$. В таком случае

$$F(\mathbf{R}^\infty, n) = (\mathbf{R}^\infty)^n \setminus \text{подмножество бесконечной коразмерности},$$

поэтому все гомотопические группы пространства $F(\mathbf{R}^\infty, n)$ тривиальны. Следовательно,

$$B(\mathbf{R}^\infty, n) \equiv F(\mathbf{R}^\infty, n)/S(n)$$

— пространство типа $K(S(n), 1$.

Еще одна серия примеров связана с группами, порожденными отражениями. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbf{R}^m$ и в нем набор гиперплоскостей $X_1, \dots, X_k$. Ортогональные отражения в этих гиперплоскостях порождают некоторую подгруппу группы $O(m)$. В некоторых случаях она конечна. Например, конечной будет группа перестановок координат. (Эта группа соответствует отражениям в гиперплоскостях, заданных всевозможными уравнениями $x_i = x_j$, $1 \le i < j \le m$.) В каждой размерности m имеется конечное число конечных групп, порожденных отражениями. Их классификация связана с классификацией полупростых групп и алгебр Ли.

Рассмотрим какую-нибудь такую группу конечного порядка N. Орбиты почти всех точек $x \in \mathbf{R}^m$ состоят из N точек, а остальные — вырожденные — орбиты пробегают конечное число гиперплоскостей: все плоскости X_i и их образы под действием нашей группы отражений. Обозначим через X объединение всех таких плоскостей.

Рассмотрим комплексификацию $\mathbf{C}^m$ пространства $\mathbf{R}^m$. Отражения из нашей группы однозначно продолжаются до линейных операторов в этой комплексификации. Объединение вырожденных орбит (то есть орбит мощности $< N$) — это объединение $X_\mathbf{C}$ комплексификаций гиперплоскостей, составляющих X.

Рассмотрим два пространства: дополнение

$$\mathbf{C}^m \setminus X_\mathbf{C}$$

и пространство орбит, т.е. факторпространство этого дополнения по действию группы отражений. Одно из этих пространств N-листно накрывает другое.

Теорема 5. *Оба эти пространства — типа* $K(\pi, 1)$.

Для большинства конечных групп, порожденных отражениями, эта теорема была доказана Брискорном, а в наиболее общей постановке — Делинем.

При этом фундаментальная группа π для дополнения называется группой крашеных кос Брискорна, связанной с этой группой отражений, а группа π для пространства орбит называется просто группой кос Брискорна.

Еще пример. Любая замкнутая двумерная поверхность, кроме S^2 и $\mathbf{R}P^2$, является пространством типа $K(\pi, 1)$. Действительно, универсальным накрытием для такой поверхности с отрицательной эйлеровой характеристикой служит плоскость Лобачевского, а для тора и для бутылки Клейна — евклидова плоскость.

Если X — пространство типа $K(\pi, n)$, то пространство петель ΩX является пространством типа $K(\pi, n-1)$ с той же самой группой π. Это доказывается с помощью расслоения Серра $E \to X$ со слоем ΩX. Напомним, что расслоение Серра — это отображение (стягиваемого) пространства путей с одним и тем же фиксированным началом и с произвольным концом, при котором пути сопоставляется его конец. Гомотопическая последовательность этого расслоения имеет вид

$$\to \pi_i(E) \to \pi_i(X) \to \pi_{i-1}(\Omega X) \to \pi_{i-1}(E) \to$$

Учитывая, что $\pi_i(E) = 0$ при всех i, получаем $\pi_i(X) = \pi_{i-1}(\Omega X)$.

4. Гомоморфизм Гуревича

Каждый i-мерный сфероид в X определяет некоторый класс гомологий в X — образ фундаментального класса сферы S^i, причем стягиваемый сфероид определяет тривиальный класс гомологий. Легко проверить, что возникающее при этом отображение $\pi_i(X) \to H_i(X)$ является гомоморфизмом групп. Этот гомоморфизм называют *гомоморфизмом Гуревича.*

Теорема 6 (В. Гуревич)**.** *Пусть $n > 1$ и у пространства X все гомотопические группы до порядка $n-1$ нулевые: $\pi_1(X) = \cdots = \pi_{n-1}(X) = 0$. Тогда $H_1(X) = \cdots = H_{n-1}(X) = 0$ и $H_n(X) \simeq \pi_n(X)$ при $n > 1$, причем изоморфизм индуцируется гомоморфизмом Гуревича.*

Если же $n = 1$, то

$$H_1(X) \simeq \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)],$$

где $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ — коммутант группы $\pi_1(X)$, и отображение $\pi_1(X) \to H_1(X)$ совпадает с этим гомоморфизмом факторизации.

(Разбор этого случая принадлежит Пуанкаре.)

Следствие (обратная теорема Гуревича): если $\pi_1(X) = 0$ и $H_2(X) = \cdots = H_{n-1}(X) = 0$, то $\pi_2(X) = \cdots = \pi_{n-1}(X) = 0$ и $\pi_n(X) \simeq H_n(X)$.

Теорема 7 (Относительная теорема Гуревича)**.** *Пусть $X \supset A$ – пара связных и односвязных топологических пространств, причем $\pi_2(X, A) = 0$. Тогда для любого $n \geq 3$ следующие два условия эквивалентны:*

а) все относительные гомотопические группы $\pi_i(X, A)$ порядка $i \leq n-1$ тривиальны: $\pi_3(X, A) = \cdots = \pi_{n-1}(X, A) = 0$;

б) $H_3(X, A) = \cdots = H_{n-1}(X, A) = 0$.

Более того, если выполнено хотя бы одно из этих условий, то $\pi_n(X, A) \simeq H_n(X, A)$, причем этот изоморфизм индуцируется (очевидным образом определяемым) относительным вариантом гомоморфизма Гуревича.

Теорема 8 (еще одна теорема Уайтхеда)**.** *Пусть X и Y — односвязные топологические пространства. Предположим, что*

(h) отображение $f : X \to Y$ индуцирует изоморфизмы $f_* : \pi_i(X) \to \pi_i(Y)$ при $i \leq n$, а при $i = n + 1$ оно индуцирует эпиморфизм.

Тогда

(H) $f_* : H_i(X) \to H_i(Y)$ — изоморфизм при $i \leq n$ и эпиморфизм при $i = n + 1$.

И наоборот, из утверждения (H) про гомологические группы следует утверждение (h) про гомотопические группы.