А.В. Колесников

Пространства Соболева

Высшая Школа Экономики. Математический факультет.

Москва. 2012 г.

Лекция 7

Гауссовские меры

Мы переходим к изучению пространств Соболева на вероятностных пространствах. Мы начнем с наиболее простой и совершенной вероятностной модели — гауссовских мер.

Определение 1. *Мера γ на $\mathbb{R}^d$ называется гауссовской, если ее преобразование Фурье имеет вид*

$$\widehat{\gamma}(y) = \exp\Big(i\langle a, y\rangle - \frac{1}{2}\langle Ky, y\rangle\Big),$$

где a — некоторый вектор, K – неотрицательная матрица.

В случае, если K имеет обратную K^{-1}, то γ имеет плотность

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det K}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\langle K^{-1}(x-a), x-a\rangle\Big)$$

Как правило, если не оговорено противное, мы ограничимся случаем $a = 0$, $K = \mathrm{Id}$ (т.н. стандартная гауссовская мера):

$$\gamma_d(y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \exp\Big(-\frac{1}{2}|y|^2\Big).$$

Многочлены Эрмита

Многочленами Эрмита на прямой называется система многочленов

$$H_k(x) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k!}} \operatorname{exp}\Big(\frac{x^2}{2}\Big) \frac{d^k}{dx^k} \operatorname{exp}\Big(-\frac{x^2}{2}\Big).$$

Оказывается, **система многочленов Эрмита является ортонормированным базисом в пространстве** $L^2(\gamma)$.

Ортонормированный базис в $L^2(\gamma_d)$ образован многочленами:

$$H_\alpha(x) = H_{k_1}(x_1)\cdots H_{k_d}(x_d), \quad \alpha = (k_1, \cdots, k_d).$$

Полугруппа Орнштейна-Уленбека

Полугруппой Орнштейна-Уленбека называется следующий оператор T_t : $L^p(\gamma_d) \to L^p(\gamma_d)$:

$$T_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(xe^{-t} + \sqrt{1 - e^{-2t}}y)\ d\gamma_d(y).$$

Полугруппа Орнштейна-Уленбека является гауссовским аналогом полугруппы теплопроводности.

Ряд свойств полугруппы Орнштейна-Уленбека вытекает из следующего замечательного соотношения: отображение

$$(x, y) \to e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y$$

сохраняет прозведение гауссовских мер $\gamma_d(x) \times \gamma_d(y)$.

В частности, чтобы убедиться, что T_t — действительно оператор в $L^p(\gamma_d)$, достаточно следующей оценки:

$$\int |T_t f|^p\ d\gamma_d(x) \leq \int \int \Big| f^p(xe^{-t} + \sqrt{1 - e^{-2t}}y) \Big|\ d\gamma_d(x) d\gamma_d(y) = \int |f(x)|^p\ d\gamma_d(x).$$

Таким образом

$$\|T_t f\|_{L^p(\gamma_d)} \leq \|f\|_{L^p(\gamma_d)}.$$

Свойства

В равенствах ниже предполагается, что f — гладкая, ограниченная вместе со своими производными функция (это сильно избыточное предположение).

1) (T_t — полугруппа)

$$T_{t+s}f = T_t(T_s f)$$

2) (Генератор T_t) $u(t,x) = T_t f$ является решением параболического уравнения в частных производных

$$u_t = \Delta u - \langle x, \nabla u \rangle, \quad u(0,x) = f(x)$$

3) (Инвариантная мера) стандартное гауссовское распределение γ_d является инвариантной мерой относительно T_t:

$$\int T_t f \cdot g \ d\gamma_d = \int f \cdot T_t g \ d\gamma_d.$$

В частности

$$\int T_t f \ d\gamma_d = \int f \ d\gamma_d.$$

4) (Эргодическое свойство)

$$\lim_{t\to\infty} T_t f = \int f \, d\gamma_d.$$

Представление T_t с помощью полиномов Эрмита

Пусть $\aleph_k$ — подпространство $L^2(\gamma_d)$, порожденная многочленами Эрмита H_α, где $\alpha = (k_1, \cdots, k_n)$, $k = k_1 + \cdots + k_n$, а I_k — проекция на это подпространство.

Теорема 1. *Для всех $t \geq 0$, $f \in L^2(\gamma_d)$ справедливо равенство*

$$T_t f = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kt} I_k f.$$

Доказательство. 1) редукция к многочленам Эрмита, 2) редукция к одномерному случаю, 3) по индукции установить сотношение $TH_k = c_k H_k$, пользуясь ортогональностью многочленов Эрмита, 4) найти явно c_k. $\square$

Интегрирование по частям

Для гладких функций f, g с интегрируемыми производными выполнена формула интегрирования по частям

$$\int \langle \nabla f, \nabla g \rangle \ d\gamma_d = -\int f L g \ d\gamma_d,$$

где

$$Lf = \Delta f - \langle \nabla f, x \rangle.$$

Соболевские неравенства

Следующий результат носит название **логарифмического неравенства Соболева**.

Теорема 2. *Пусть* $f \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$. *Тогда*

$$\mathrm{Ent}\Big(f^2\Big) \leq 2 \int |\nabla f|^2 \ d\gamma_d,$$

где $\mathrm{Ent}\Big(f^2\Big) = \int f^2 \log\Big(\frac{f^2}{\int f^2 \ d\gamma_d}\Big) \ d\gamma_d$ *(энтропия).*

Замечание 1. Левая часть неравенства неотрицательна в силу неравенства Йенсена.

Замечание 2. Логарифмическое неравенство Соболева является естественным обобщением неравенств Соболева на гауссовский случай. Оно может показаться значительно слабее, потому что в левой части стоит не степенная функция, а энтропия. Но есть важная особенность: константа в логарифмическом неравенстве Соболева **не зависит от размерности**.

Доказательство. Доказательство легко сводится к случаю $f \geq c > 0$. Положим $\varphi = f^2$. Тогда $\nabla f = \frac{1}{2\sqrt{\varphi}} \nabla\varphi$ и неравенство равносильно следующему:

$$\mathrm{Ent}\big(\varphi\big) \leq \frac{1}{2} \int \frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi} \, d\gamma_d.$$

В силу свойства $\lim_{t\to\infty} T_t f = \int f \, d\gamma$ имеем:

$$\int \varphi \log \varphi \, d\gamma_d - \int \varphi \, d\gamma_d \cdot \log\Big(\int \varphi \, d\gamma_d\Big) = -\int_0^\infty \frac{d}{dt}\Big(\int T_t\varphi \log T_t\varphi \, d\gamma_d\Big) \, dt$$

Заметим, что

$$\frac{d}{dt}\Big(\int T_t\varphi \log T_t\varphi \, d\gamma_d\Big) = \int L(T_t\varphi)\big(\log T_t\varphi + 1\big) \, d\gamma_d = \int L(T_t\varphi) \log T_t\varphi \, d\gamma_d$$
$$= -\int \frac{|\nabla T_t\varphi|^2}{T_t\varphi} \, d\gamma_d.$$

Воспользуемся легко проверяемыми свойствами

$$\nabla T_t f = e^{-t} T_t(\nabla f).$$

$$T_t^2(fg) \le T_t f^2 \cdot T_t g^2.$$

Из второго неравенства получаем

$$\frac{(T_t \varphi_{x_i})^2}{T_t \varphi} \le T_t\Big(\frac{\varphi_{x_i}^2}{\varphi}\Big).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}\big(\varphi\big) &\le \int_0^\infty e^{-2t} \int T_t\Big(\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\Big)\ d\gamma_d\ dt = \int_0^\infty e^{-2t} \int \Big(\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\Big)\ d\gamma_d\ dt \\ &= \frac{1}{2}\int\Big(\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\Big)\ d\gamma_d.\end{aligned}$$

□

Следствие 1. *Для* $f \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$ *выполнено* **неравенство Пуанкаре**

$$\int\Big(f - \int f\ d\gamma_d\Big)^2\ d\gamma \le \int |\nabla f|^2\ d\gamma_d.$$

Доказательство. Доказательство 1. Применить логарифмическое неравенство Соболева к функции $1 + \varepsilon\varphi$ и перейти к пределу. Доказательство 2. Воспользоваться разложением в ряд по многочленам Эрмита. □

Листок 7

1) Докажите, что многочлены Эрмита являются ортонормированным базисом в $L^2(\gamma_d)$.

2) Докажите свойства 1)-4) полугруппы Орнштейна-Уленбека для функции $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$.

3) Докажите полугрупповое свойство для полугруппы теплопроводности, используя ее интегральное представление.

4) Докажите свойства 3)-4) для полугруппы Орнштейна-Уленбека для функции $f \in L^1(\gamma_d)$.

5) Используя преобразование Фурое, докажите, что решение параболического уравнения $u_t = \Delta u - \langle x, \nabla u \rangle$, $u(0, x) = f(x)$ задается формулой для полугруппы Орнштейна-Уленбека.

6) Докажите следствие 1.

7) Пусть $\varphi \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$ — неотрицательная функция. Докажите, что $\lim_{t\to\infty} \mathrm{Ent}(T_t\varphi) = 0$ и, более того, $\mathrm{Ent}(T_t\varphi)$ сходится к нулю с экспоненциальной скоростью.

Литература

1. Богачев В.И., Гауссовские меры. М. Наука, 1997.