А.В. Колесников

Пространства Соболева

Высшая Школа Экономики. Математический факультет.

Москва. 2012 г.

Лекции 11-12

Логарифмическое неравенство Соболева на многобразиях. Теоремы сравнения.

Формула Бохнера

Применим выкладки выше для вывода формулы Бохнера (Бохнера-Вайценбёка-Лихнеровича). В простейшем случае $M = \mathbb{R}^d$ формула Бохнера имеет вид

$$-\Delta \frac{|\nabla f|^2}{2} + \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle + \|\nabla^2 f\|^2_{HS} = 0.$$

Проинтегрировав это соотношение и применив интегрирование по частям, мы получим уже известную нам формулу (для финитной f).

$$\int \|\nabla^2 f\|^2_{HS} \, dx = \int (\Delta f)^2 \, dx.$$

Наша задача: вывести формулу Бохнера для многообразий.

Для вывода используется хорошо известная в механике сплошной среды идея: двойственность между формализмами Лагранжа и Эйлера. В классическом виде это выглядит так. Пусть задана векторное поле $v(t)$ и соответствующий поток преобразованиий

$$\dot{x}(t) = v(x(t)), \quad x(0) = x_0.$$

От эволюции отдельной частицы, стартующей из точки x_0 (**Лагранжев формализм**), можно перейти к эволюции **плотности**. Обозначим через ρ_t плотность частиц в момент t. Эволюция плотности (**Эйлеров формализм**) описывается уравнением

$$\dot{\rho}_t + \mathrm{div}(\rho_t \cdot v) = 0.$$

Формула Бохнера будет получена переходом от эволюции коэффициента искажения (т.е., фактически, плотности) к эволюции скоростей частиц. Напомним уравнение, полученное в предыдущей лекции.

$$\mathrm{Tr}(\dot{U}) + \mathrm{Tr}(U^2) + Ric = 0 \tag{1}$$

$$\mathrm{Tr}(U) = \frac{\dot{\mathcal{J}}}{\mathcal{J}}.$$

Рассмотрим семейство векторных полей $\xi(t, x)$, определенное формулой

$$\xi(t, \gamma(t, x)) = \dot{\gamma}(t, x), \qquad \gamma(t, x) = \exp_x(t\xi(x)), \quad \xi(0, x) = \xi(x) \tag{2}$$

при малых $t < t_0$. Представить себе это можно так: начальное поле $\xi(x)$ порождает поток диффеоморфизмов, образованных сдвигами вдоль геодезических. Значение поля $\xi(t,y)$ равно касательному вектору к геодезической, проходящей через y в момент t.

Продифференцировав (2) по t, получаем "уравнение Эйлера"

$$\frac{\partial}{\partial t}\xi + \nabla_\xi \xi = 0.$$

Продифференцировав (2) по x, получаем

$$\dot{\mathbf{J}}(t,x) = \nabla\xi(t,\gamma(t,x))\mathbf{J}(t,x).$$

Тогда

$$U(t,x) = \dot{\mathbf{J}}(t,x)\mathbf{J}^{-1}(t,x) = \nabla\xi(t,\gamma(t,x)).$$

Используя $\frac{\partial}{\partial t}\xi + \nabla_\xi \xi = 0$, получаем

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathrm{Tr}(U(t,x)) &= \frac{d}{dt}\Big(\mathrm{div}\ \xi(t,\gamma(t,x))\Big) \\
&= \mathrm{div}\Big(\frac{\partial\xi}{\partial t}(t,\gamma(t,x))\Big) + \langle\dot\gamma(t,x), \nabla(\mathrm{div}\xi)\rangle(t,\gamma(t,x)) \\
&= -\mathrm{div}(\nabla_\xi \xi) + \langle\xi, \nabla(\mathrm{div}\xi)\rangle(t,\gamma(t,x)).
\end{aligned}$$

В силу уравнения (1)

$$-\mathrm{div}(\nabla_\xi \xi) + \langle \xi, \nabla(\mathrm{div}\xi)\rangle + \mathrm{Tr}(\nabla\xi)^2 + Ric(\xi,\xi) = 0.$$

В частности, если $\xi(x) = \nabla f(x)$, то отсюда вытекает

Теорема 1. *(***Формула Бохнера***)*

$$-\Delta\frac{|\nabla f|^2}{2} + \langle \nabla f, \nabla\Delta f\rangle + \|\nabla^2 f\|^2_{HS} + Ric(\nabla f, \nabla f) = 0.$$

Логарифмическое неравенство Соболева на многообразиях

В качестве приложения формулы Бохнера обсудим идею доказательства логарифмического неравенства Соболева на многообразиях. Пусть M — многообразие с положительной кривизной Риччи

$$Ric \geq K \cdot g, \quad K > 0.$$

Как мы скоро увидим, многообразия с положительной кривизной Риччи компактны. В частности, под римановым объемом в теореме мы будем подразумевать нормализованный риманов объем, т.е., деленный на константу таким образом, чтобы мера всего многообразия была равна единице.

Теорема 2. *Для гладкой функции f*

$$\mathrm{Ent} f^2 = \int_M f^2 \log\left(\frac{f^2}{\int_M f^2\, d\mathrm{vol}}\right)\, d\mathrm{vol} \le \frac{2}{K}\int_M |\nabla f|^2\, d\mathrm{vol}.$$

Доказательство в точности следует доказательству для гауссовского случая, только вместо полугруппы Орнштейна-Уленбека применятся полугруппа теплопроводности на M, т.е. полугруппа $P_t g(x) = u(t,x)$, порожденная оператором Лапласа-Бельтрами:

$$u_t = \Delta u, \quad u(0,x) = g.$$

В доказательстве применяется следующее свойство:

$$|\nabla P_t g|^2 \le e^{-2Kt} P_t(|\nabla g|^2),$$

вытекающее из формулы Бохнера. Положим

$$\varphi(s) = e^{-2Ks} P_s(|\nabla P_{t-s} f|^2).$$

Тогда

$$\varphi'(s) = 2e^{-2Ks}\Big[-KP_s(|\nabla P_{t-s}f|^2) + P_s\Big(\frac{1}{2}\Delta|\nabla P_{t-s}f|^2 - \langle\nabla P_{t-s}f, \nabla\Delta P_{t-s}f\rangle\Big)\Big].$$

В силу формулы Бохнера последняя величина неотрицательна, поэтому φ не убывает и $\varphi(0) \le \varphi(t)$, что дает искомое неравенство.

Наконец, имеет место следующий общий факт.

Теорема 3. *(**Д. Бакри, М. Эмери, 1985**) Пусть M — риманово многообразие, наделенное вероятностной мерой μ с плотностью e^{-V} относительно риманова объема. Предположим, что*

$$\nabla^2 V + Ric \geq K \cdot g, \quad K > 0.$$

Тогда для любой гладкой функции f

$$\mathrm{Ent}_\mu f^2 = \int_M f^2 \log\Big(\frac{f^2}{\int_M f^2\, d\mu}\Big)\, d\mu \leq \frac{2}{K}\int_M |\nabla f|^2\, d\mu.$$

Теоремы сравнения

Теоремы сравнения для римановых многообразий обычно не рассматриваются как часть теории соболевских пространств. Тем не менее, классические результаты в этой области очень близки по духу обсуждаемому материалу.

Зафиксируем точку $p \in M$ и рассмотрим функцию $r(x) = \mathrm{dist}(p,x)$. В точках гладкости r можно определим векторное поле $N = \nabla r$. Очевидно, $|N| = 1$.

Симметрический тензор $II = \nabla^2 r = \nabla N$ называется **второй фундаментальной формой** подмногообразия $\tilde{M}(r) = \mathrm{dist}(x,p) = r$, являющегося линией уровня функции r. Если $v \in T\tilde{M}(r)_x$, $|v| = 1$, то величина $II(v,v)$ называется кривизной $\tilde{M}(r)$ в направлении v. Средней кривизной $\tilde{M}(r)$ называется след II. Очевидно,

$$m = \mathrm{Tr}(II) = \Delta r.$$

Подняв индекс этого тензора, мы получим так называемый shape operator S: $S_i^k = g^{ki} II_{kj}$.

"Полярная" система координат. Как минимум локально можно определить следующую систему координат: пусть $(\theta_1, \cdots, \theta_{d-1})$ — некоторая система координат на сфере $S^{d-1} \subset TM_p$ единичного радиуса. Отображение $[0,R] \times S^{d-1} \to \exp(r\theta) \in M$ задает систему кординат на M.

Важное упражнение. Докажите, что метрика g удовлетворяет уравнению

$$\partial_r g = 2Sg,$$

т.е. $\partial_r g_{ij} = 2S_i^k g_{kj}$.

Отсюда и из формулы дифференцирования оределителя $\partial_x \log \det A = \mathrm{Tr}(A_x \cdot A^{-1})$ следует соотношение

$$\partial_r \log \det g = 2\mathrm{Tr}(II) = 2m. \tag{3}$$

Применив формулу Бохнера к функции $r(x)$, получаем

$$0 = \left\|II\right\|_{\mathrm{HS}}^2 + \partial_r m + \mathrm{Ric}(\nabla r, \nabla r).$$

Из неравенство Коши-Буняковского

$$\left\|II\right\|_{\mathrm{HS}}^2 \geq \frac{m^2}{d-1}$$

получаем неравенство

$$\partial_r m + \frac{m^2}{d-1} \leq -\mathrm{Ric}(\nabla r, \nabla r). \tag{4}$$

Продифференцировав выражение для риманова объема

$$\mathcal{V}(r,\theta) = \sqrt{\det(g(r,\theta))}$$

в полярных координатах, получим уравнение

$$\partial_r \mathcal{V} = m \cdot \mathcal{V}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) вытекает следующее неравенство:

$$\partial_r^2 \mathcal{V}^{\frac{1}{d-1}} \leq -\mathrm{Ric}(\nabla r, \nabla r) \cdot \mathcal{V}^{\frac{1}{d-1}}. \tag{6}$$

Доказательство следующей теоремы опирается на некоторый классические результаты римановой геометрии, доказательства которых можно найти, например в книге (1), Гл. 5.

Теорема 4. *(**Bonnet-Myers**) Пусть M — полное риманово многообразие с Ric $\geq K \cdot g > 0$. Тогда его диаметр не превосходит*

$$\mathrm{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{K}} \sqrt{d-1}.$$

Доказательство. Поскольку многообразие полное, то любые две его точки p, x можно соединить кратчайшей геодезической $[0, \mathrm{dist}(x,p)] \ni t \to \gamma(t) \in M$ (теорема Хопфа-Ринова). Определим область $V \subset TM_x$ следующим образом: $V = \{v : \exp_p(tv) : [0,1) \to M$ — кратчайшая геодезическая$\}$.

Известно, что экспоненциальное отображение является гладким на V. Из неравенства (6) и условия теоремы получаем, что

$$\mathcal{V}^{\frac{1}{d-1}}(t) \leq \sin(\sqrt{K/(d-1)}t)/\sqrt{K/(d-1)}.$$

Но если $\sqrt{K/(d-1)}t > \pi$ для некоторого t, то $\mathcal{V}^{\frac{1}{d-1}}$ обратится в ноль в некоторой точке. Это означает, что экспоненциальное отображение потеряет гладкость. Мы пришли к противоречию. $\square$

Формулировки многих теорем сравнения могут быть даны в терминах **модельных пространств** постоянной кривизны Риччи (даже секционной кривизны). К таковым относятся

1) евклидово пространства $Ric = 0$

2) сфера $Ric = K \cdot g > 0$

3) пространство Лобачевского $Ric = K \cdot g < 0$.

Обозначим через $v(t, K, d)$ объем шара радиуса t в d-мерном модельном пространстве кривизны K.

Теорема 5. *(**Бишоп-Громов**) Пусть M — полное риманово многообразие с Ric $\geq K \cdot g > 0$, $x \in M$, $B_t(x) = \{y : \text{dist}(x, y) \leq t\}$. Функция $t \to \frac{\text{vol}(B_t(x))}{v(t,K,d)}$ является невозрастающей.*

Теоремы сравнения и изопериметрические неравенства

С этим материалом можно познакомиться по книге

Morgan F. Geometric measure theory: a Beginner's guide. 5th ed. Chapter 18. Manifolds with Density and Perelman's Proof of the Poincaré Conjecture.

Основные результаты:

1) Неравенство Хайнце-Кархера для многообразий с плотностью (теорема 18.5).

2) Теорема Леви-Громова для многообазий с плотностью (теорема 18.7).

Литература

1. Petersen P., Introduction to Riemannian geometry.

2. Villani C., Optimal transport: old and new.

3. Morgan F. Geometric measure theory: a Beginner's guide.

Листки 11-12

1) В предположении существования гладкого потока диффеоморфизмов $\Phi_t(x_0) = x(t), x(0) = x_0$, порожденных уравнением $\dot{x} = v(x)$. выведите уравнение Эйлера из уравнения Лагранжа. Докажите, что имеет место представление $\rho_t(x_t) = \rho_0(x) \exp(-\int_0^t \operatorname{div}(v) \circ (x_s)\ ds)$. Докажите теорему Лиувилля о сохранении фазового объема.

2) Докажите ''плоский'' вариант формулы Бохнера. Пусть $Lf = \Delta f - \langle \nabla f, \nabla V \rangle$ — эллиптический оператор на $\mathbb{R}^d$, $\mu = e^{-V}\ dx$ — вероятностная мера, V — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Тогда

$$-L\frac{|\nabla f|^2}{2} + \langle \nabla f, \nabla Lf \rangle + \|\nabla^2 f\|^2_{HS} + \langle D^2 V \cdot \nabla f, \nabla f \rangle = 0.$$

Докажите, что для $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$-функции f:

$$\int (Lf)^2\ d\mu = \int \|\nabla^2 f\|^2_{HS}\ d\mu + \int \langle D^2 V \cdot \nabla f, \nabla f \rangle\ d\mu.$$

3) Пусть $\mu = e^{-V}\ dx$ — вероятностная мера, V — дважды непрерывно дифференцируемая выпуклая функция, $D^2 V \geq K \cdot \mathrm{Id} > 0$. Докажите

1) неравенство Пуанкаре

$$\int f^2 \, d\mu \leq \frac{1}{K} \int |\nabla f|^2 \, d\mu, \quad \int f \, d\mu = 0.$$

2) неравенство Браскампа-Либа

$$\int f^2 \, d\mu \leq \int \langle (D^2 V)^{-1} \nabla f, \nabla f \rangle \, d\mu, \quad \int f \, d\mu = 0.$$

Указание: это неравенство является "инфинитезимальной версией" функциональной формы неравенства Брунна-Минковского.

4) Как выглядит формула Бохнера для многообразия с мерой?

5) Докажите, что метрика g удовлетворяет уравнению

$$\partial_r g = 2Sg.$$

6) Докажите формулу $\partial_x \log \det A = \mathrm{Tr}(A_x \cdot A^{-1})$.

7) Пусть M — гладкое компактное многообразие положительной кривизны Риччи. Докажите, что для любой гладкой функции f выполнено

$\lim_{t\to\infty} P_t f = \int_M f\, dvol$. Используйте **принцип максимума**: $P_t f \geq 0$ для любой неотрицательной функции f.

8) Пусть M — риманово многообразие, $Ric_M \geq K \cdot g$. Докажите, что если функция $r = dist(p, x)$ — гладкая на $U = \{x : dist(x,p) \leq R\} \setminus p$, то на U выполнено неравенство

$$m_M \leq m_K,$$

$m_M = \Delta r$, $m_K = m_K(r)$ — соответствующая функция на модельном пространстве с кривизной K.

9) (Салофф-Кост, Леду) Докажите, что если многообразие конечного объема и неотрицательной кривизны Риччи удовлетворяет логарифмическому неравенству Соболева, то оно компактно. Указание: используйте неравенства концентрации и теорему Бишопа-Громова о росте объема шаров.

10) Сделайте упражнение 18.2 из книги 3.

11) Сделайте упражнение 18.6 из книги 3.