лее сильный принцип Йенсена $\diamondsuit$. Аксиома Мартина и ее приложения рассматриваются в шестой главе, написанной М. Рудин. Приложения CH и $\diamondsuit$ рассматриваются в третьей и седьмой главах, написанных соответственно К. Кюненом и И. Юхасом.

Трудный способ состоит в построении моделей. Именно, если мы хотим доказать, что некоторое предложение φ совместимо с ZF, то мы строим модель $\mathfrak{M}$, в которой истинны все аксиомы (а следовательно, и теоремы) теории ZF, а также истинно рассматриваемое предложение φ.

Первой такой моделью был построенный Гёделем универсум L всех конструктивных множеств. Он является очень естественной моделью — именно, наименьшей моделью теории ZF, содержащей все ординалы. Гёдель доказал, что в модели L истинны аксиома выбора AC и континуум-гипотеза CH. Следовательно, AC и CH совместимы с аксиомами теории множеств. Многие красивые и более глубокие свойства этой модели такие, как принцип $\diamondsuit$, были открыты Йенсеном. Эти результаты Гёделя и Йенсена представлены К. Девлином в главе 5.

Второй чрезвычайно плодотворный метод построения моделей — это метод вынуждения Коэна. Сам Коэн использовал свой метод для установления невыводимости AC и CH в ZF. Впоследствии этот метод был усовершенствован и упрощен Соловеем и другими математиками и в настоящий момент является мощным и не таким уж сложным методом получения результатов о непротиворечивости. Берджес в главе 4 излагает метод вынуждения в доступном для математиков-нелогиков виде, позволяющем им получать собственные результаты о непротиворечивости. Предварительный материал этой главы (об абсолютности) используется в пятой главе.

Написанная К. Кюненом третья глава посвящена комбинаторике и не предполагает никакого знакомства читателя с логикой. В ней рассматриваются инфинитарные комбинаторные принципы теории множеств (некоторые из этих принципов возникли из работ по логике), нашедшие широкое распространение. В частности, показано, что AC, CH и $\diamondsuit$ можно рассматривать как возрастающие по силе принципы «перечисления», и указаны примеры их использования в математике. Обсуждается также теорема Рамсея и ее обобщения на несчетные кардиналы. Заканчивается глава введением в теорию больших кардиналов, появляющихся при анализе указанных обобщений теоремы Рамсея. В добавлении к этой главе рассмотрены большие кардиналы другой природы.

К. Кюнен

АКСИОМЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Джозеф Р. Шенфилд

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение

В принципе аксиоматическая система строится следующим образом. Сначала мы выбираем основные понятия и как можно полнее разъясняем их природу. Затем пишем аксиомы для этих понятий. При этом наши разъяснения должны сделать очевидной истинность написанных аксиом.

Попытаемся представить аксиомы теории множеств именно таким образом. Начнем с объяснения понятия множества. Наше объяснение может показаться слишком сложным математику, считающему, что он понимает множества достаточно хорошо. Мы увидим, однако, что это объяснение довольно полезно, и не только для проверки аксиом теории множеств, но и для введения новых аксиом, а также для доказательства теорем о множествах.

Представленные здесь идеи развивались постепенно на протяжении последнего столетия. Но они редко появлялись в печати в последовательном изложении, хотя и хорошо известны для большинства специалистов по теории множеств. Этим объясняется отсутствие библиографии.

§ 2. Множества и образование множеств

Как объяснить понятие множества? В первом приближении множество есть совокупность объектов. Множество образуется путем отбора определенных объектов, называемых его элементами; множество полностью определено своими элементами.

Элементы множеств могут быть объектами любой природы. В частности, мы хотим рассматривать любое множество как объект и поэтому разрешим ему быть элементом другого множества. Объекты, не являющиеся множествами, но используемые в качестве элементов множеств, называются *праэлементами.*

Даже без помощи праэлементов мы можем построить достаточно много множеств. Можно образовать пустое множество $\varnothing$; множество $\{\varnothing\}$, состоящее из единственного элемента $\varnothing$; множество, элементами которого являются только $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$, и т. д. Ограничимся только такими множествами и будем использовать буквы x, y, z для их обозначения. Мы объясним позже, почему это ограничение ничего не упускает.

Итак, мы приходим к тому, что любое множество x образовано отбором тех множеств, которые являются элементами x. Существуют ли какие-нибудь ограничения на такой способ образования множеств? Как показывают парадоксы теории множеств, ограничения действительно существуют.

Напомним парадокс Рассела. Пусть r есть множество, элементами которого являются все такие множества x, что x не есть элемент x. Тогда для любого множества x будет

$$x \in r \longleftrightarrow x \notin x. \tag{1}$$

Подставив r вместо x, получим противоречие.

Объяснение в сущности не сложно. Когда мы строим какое-то множество z, выбирая его элементы, мы еще не имеем z как объект и поэтому не можем использовать его в качестве элемента множества z. По той же причине некоторые другие множества также не могут быть элементами z. Например, предположим, что $z \in y$. Тогда мы не можем образовать множество y, пока не построено z. Следовательно, при построении z у нас нет в распоряжении множества y, и поэтому y не может быть элементом z. Иными словами, элементами множества z могут быть лишь те множества, которые построены раньше[1]) z. Таким образом, для построенного выше множества r условие (1) выполняется только для множеств, построенных раньше r; поэтому нельзя подставлять r вместо x.

Продолжая этот анализ, приходим к следующей схеме. Множества строятся последовательно по шагам. Для каждого шага S имеются шаги, предшествующие шагу S, т. е. осуществляющиеся раньше шага S. Каждая совокупность, которую мы строим на шаге S из множеств, построенных на шагах раньше

[1]) Слово «раньше» понимается здесь скорее в логическом, чем во временном смысле, аналогично тому, что мы имеем в виду, когда говорим, что одна теорема должна быть доказана раньше другой.

S, является множеством[1]). Нет других множеств, кроме построенных на одном из шагов.

Эта схема достаточно ясно поясняет понятие множества в терминах понятий *шаг* и *раньше*. Что можно сказать об этих понятиях? Несомненно, отношение *раньше* должно частично упорядочивать шаги; и это является единственным свойством указанного отношения, необходимым для наших аксиом.

Шаги важны для нас потому, что они дают возможность строить множества. Предположим, что x есть совокупность множеств, а $\boldsymbol{S}$ есть такая совокупность шагов, что каждый элемент множества x строится на каком-нибудь шаге из $\boldsymbol{S}$. Если существует шаг после всех шагов из $\boldsymbol{S}$, то на этом шаге можно построить множество x. Поэтому возникает следующий фундаментальный вопрос: если дана совокупность $\boldsymbol{S}$ шагов, то существует ли шаг, следующий за каждым шагом из $\boldsymbol{S}$?

Мы хотели бы иметь положительный ответ на этот вопрос всегда, когда это возможно. Теоретико-множественные парадоксы не разрешают каждой совокупности множеств быть множеством, но мы избежали парадоксов, ограничившись множествами, которые строятся на каком-то шаге. И мы хотим иметь достаточно много шагов, чтобы не слишком ограничивать понятие множества.

Тем не менее ответ на наш вопрос не всегда может быть положительным. Например, если $\boldsymbol{S}$ есть совокупность всех шагов, то, разумеется, нет ни одного шага после всех шагов из $\boldsymbol{S}$.

Возможный ответ на наш фундаментальный вопрос таков: если можно представить себе ситуацию, когда все шаги из $\boldsymbol{S}$ осуществлены, то существует шаг после всех шагов из $\boldsymbol{S}$. В случае, когда $\boldsymbol{S}$ содержит все шаги, мы не можем представить себе такую ситуацию, поскольку всегда имеем в виду следующий шаг. Но это в лучшем случае довольно неопределенный ответ, так как, вообще говоря, не всегда ясно, что мы можем, а что не можем себе представить. Тем не менее этот ответ дает полезный ключ для получения более ясных принципов, на которых основаны наши аксиомы.

В частности, существуют три случая, в которых наш неопределенный ответ приводит к выводу, что существует шаг после всех шагов из $\boldsymbol{S}$. Первым является случай, когда $\boldsymbol{S}$ состоит из единственного шага. Вторым — когда $\boldsymbol{S}$ состоит из бесконечной последовательности S_0, S_1, ... шагов. И третьим — тот случай, когда мы имеем множество x и шаг S_y для каждого y из x, и $\boldsymbol{S}$ состоит из всех таких шагов S_y.

[1]) Заметим, что множество, построенное на шаге S, может быть построено и на любом последующем шаге. Можно было бы организовать схему так, что каждое множество строилось бы только на одном шаге. Однако нет оснований стремиться к этому.

В первых двух случаях мы отчетливо можем представить себе ситуацию, когда все шаги из S уже осуществлены. В третьем случае можно рассуждать следующим образом. Если какое-то y из x построено, то мы считаем шаг S_y осуществленным. Когда мы дойдем до шага, на котором строится множество x, каждое y из x уже будет построено, и, следовательно, каждый шаг S_y из S будет осуществлен.

Мы уже продвинулись в наших рассуждениях достаточно далеко для получения обычных аксиом теории множеств. Все же остается еще немало темных пятен, дальнейший анализ которых мог бы привести к лучшему пониманию аксиом или к новым аксиомам. По мере дальнейшего продвижения мы будем обращать внимание на некоторые из них.

Конечно, не исключено, что возможен совсем иной анализ понятия множества, и это могло бы привести к совершенно другой системе аксиом. Однако в настоящее время нет анализа понятия множества, существенно отличающегося от предложенного здесь и приводящего к удовлетворительной системе аксиом.

§ 3. Аксиомы

Перед тем, как обратиться к аксиомам, нужно описать язык теории множеств. Этот язык содержит *переменные для множеств* x, y, z, ..., которые обозначают произвольные множества. Он также содержит символ $\in$ для отношения принадлежности.

Остальные обозначения являются логическими. Мы имеем символ $=$ для *тождественно с*. Мы имеем пропозициональные связки: $\neg$ для *не*, $\vee$ для *или*, $\wedge$ для *и*, $\rightarrow$ для *влечет*, $\leftrightarrow$ для *если и только если*. Имеются кванторы: $\forall$ для *для всех*, $\exists$ для *для некоторого*, и $\exists!$ для *существует и единственно*. Переменные, следующие за квантором, могут быть ограничены некоторым множеством; например, $\forall x \in y$ означает *для всех x из y*.

Конечно, одни логические обозначения могут быть выражены через другие, но мы интересуемся теорией множеств, а не логикой. По этой причине мы не будем формулировать аксиомы логики первого порядка и даже не будем давать точное определение формулы логики первого порядка. Все это подробно обсуждается в вводной главе 1 «Теории моделей», написанной Барвайсом.

Напомним, как вводятся операции в логических системах. Унарная операция F вводится путем определения $F(x)$ как единственного y такого, что $\varphi(x, y)$ (где $\varphi(x, y)$ есть произвольная формула нашего языка, не содержащая F). Точнее, мы сперва доказываем $\forall x \exists! y \varphi(x, y)$, а затем вводим F аксиомой $\varphi(x, F(x))$.

При этом формула $\psi(F(x))$ рассматривается как сокращение для $\exists y (\varphi(x, y) \wedge \psi(y))$. Бинарные и n-арные операции рассматриваются аналогично.

Замечание. Операции могут зависеть от параметров. Можно определить, например, $F(x) = x \cup y$, так что F зависит от y.

Теперь обратимся к аксиомам. В самом начале нашего анализа было установлено, что любое множество полностью определяется своими элементами. Это и является содержанием нашей первой аксиомы.

Аксиома объемности. $\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y$.

Одним из наиболее важных моментов нашего анализа является утверждение, что определенные совокупности множеств будут множествами. Переводя это в наш язык, мы встречаемся с трудностью: нет возможности говорить о совокупностях в этом языке, если уже не установлено, что они являются множествами. Существуют однако совокупности, о которых мы можем говорить. Именно, если дана формула $\varphi(x)$, то можно выражать определенные суждения о совокупности всех таких множеств x, что $\varphi(x)$. В частности, мы можем следующим образом сказать, что указанная совокупность есть множество: $\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$. Сокращением этого выражения является $\mathrm{Set}\{x\colon \varphi(x)\}$.

Нашим первым принципом существования множеств будет следующий: если каждый элемент некоторой совокупности множеств принадлежит определенному множеству y, то эта совокупность есть множество. Чтобы понять это, предположим, что y строится на шаге S. Тогда каждый элемент множества y уже построен раньше S, и, следовательно, таковым является каждый элемент рассматриваемой совокупности. Таким образом, сама совокупность может быть построена на шаге S как множество. Мы выражаем этот принцип следующей аксиомой:

Аксиома выделения. $\forall x (\varphi(x) \rightarrow x \in y) \rightarrow \mathrm{Set}\{x\colon \varphi(x)\}$.

Заметим, что аксиома выделения является не одной аксиомой, а бесконечным семейством аксиом, содержащим по одной аксиоме для каждой формулы $\varphi(x)$. Название аксиомы объясняется тем, что мы выделяем такие x, которые удовлетворяют $\varphi(x)$, из всех элементов множества y.

Наш следующий принцип утверждает: объединение всех элементов любого множества x есть множество. Предположим, что x строится на шаге S. Тогда каждый элемент множества x построен раньше S, и тем самым каждый элемент элемента множества x также построен раньше S. Это означает, что каждый элемент рассматриваемого объединения уже построен раньше S, и поэтому объединение может быть построено на шаге S. Этот принцип сформулирован в следующей аксиоме:

Аксиома объединения. $\mathrm{Set}\{z\colon \exists y \in x\,(z \in y)\}$.

Следующий принцип таков: совокупность всех подмножеств произвольного множества x является множеством. Предположим, что x строится на шаге S. Поскольку каждый элемент множества x построен раньше S, то каждое подмножество множества x строится на шаге S. Таким образом, множество всех подмножеств множества x может быть построено на любом шаге после S.

Чтобы сформулировать этот принцип в виде аксиомы, определяем

$$x \subseteq y \leftrightarrow \forall z\,(z \in x \to z \in y).$$

Аксиома степени. $\mathrm{Set}\{y\colon y \subseteq x\}$.

Нашим следующим принципом будет: если F есть унарная операция, а x является множеством, то совокупность всех таких $F(y)$, что $y \in x$, является множеством. Чтобы проверить это, допустим, что S_y есть шаг, на котором строится множество $F(y)$. Тогда существует шаг после всех шагов S_y. На этом шаге можно построить искомое множество всех таких $F(y)$, что $y \in x$.

Аксиома подстановки. $\mathrm{Set}\{z\colon \exists y \in x\,(z = F(y))\}$[1].

Наша следующая аксиома гарантирует существование бесконечного множества. Это не совсем просто, поскольку в нашем языке нет прямого способа выражения бесконечности множества.

Аксиома бесконечности. $\exists x\,((\exists y \in x \forall z\,(z \notin y))$

$$\wedge\ \forall y \in x \exists z \in x \forall w\,(w \in z \leftrightarrow w \in y \vee w = y))$$[2].

Покажем, почему аксиома бесконечности истинна. Пусть x_0 — пустое множество, и для каждого n пусть x_{n+1} есть множество, элементами которого являются только элементы множества x_n, а также само x_n. Мы можем построить x_0 на любом шаге, и если x_n построено на некотором шаге, то x_{n+1} можно построить на следующем шаге. Предположим, что x_n строится на шаге S_n. Тогда существует шаг после всех шагов S_n. На этом шаге мы можем построить множество x, элементами которого будут $x_0, x_1, \ldots$ Это x и будет множеством, существование которого утверждается аксиомой бесконечности.

Элемент y множества x называется *минимальным элементом* x, если y и x не имеют общих элементов. Наша следующая

[1]) Здесь снова речь идет о бесконечном семействе (иногда пишут — схеме) аксиом, поскольку аксиому подстановки можно записать в виде $\forall y \exists! z\, \varphi(y, z) \to \mathrm{Set}\{z\colon \exists y \in x \varphi(y, z)\}$, где $\varphi(y, z)$ — произвольная формула. — *Прим. перев.*

[2]) Таким образом, аксиома бесконечности утверждает существование непустого множества x, одним из элементов которого является пустое множество и которое содержит вместе с каждым своим элементом $y \in x$ множество $z = \{w\colon w \in y \vee w = y\}$. — *Прим. ред.*

аксиома утверждает, что каждое непустое множество имеет минимальный элемент.

Аксиома регулярности[1]). $\exists y\,(y \in x) \to \exists y \in x \forall z \in y\,(z \notin x)$.

Покажем, почему истинна аксиома регулярности. Скажем, что шаг S *минимален* для x, если некоторый элемент множества x строится на шаге S, но никакой элемент x не строится раньше S. Если шаг S минимален для x и y есть элемент множества x, строящийся на шаге S, то y является минимальным элементом x, поскольку каждый элемент этого множества y строится раньше S и поэтому не может быть элементом x.

Таким образом, достаточно показать, что для каждого непустого множества x существует шаг, минимальный для S. Это часто признается очевидным свойством шагов. Мы приведем однако принадлежащее Д. Скотту доказательство того, что это свойство следует из фактов, которые мы уже знаем о шагах.

Множество x называется *фундированным*, если каждое множество, содержащее x, имеет минимальный элемент. (Конечно, если аксиома регулярности истинна, то каждое множество является фундированным.)

Если каждый элемент множества x является фундированным, то таково же и само x. Действительно, пусть $x \in y$. Если x и y не пересекаются, то x есть искомый минимальный элемент множества y.

В противном случае y содержит некоторый элемент множества x, который является фундированным по предположению. Следовательно, множество y снова содержит минимальный элемент.

Для каждого шага S пусть G_S есть множество всех фундированных множеств, построенных перед S. Это G_S на самом деле будет множеством, поскольку оно может быть построено на шаге S, и G_S является фундированным, как показано выше. Если шаг T находится раньше S, то множество G_T фундировано и строится на шаге T раньше S; поэтому $G_T \in G_S$.

Пусть теперь множество x непусто и строится на шаге S. Пусть y есть множество всех таких G_T, что шаг T находится раньше S и некоторый элемент множества x строится на шаге T. Это y будет множеством, так как каждое G_T построено перед S. Оно непусто (поскольку x непусто) и все его элементы фундированы. Следовательно, y имеет минимальный элемент G_T. Мы утверждаем, что T является минимальным шагом для x. В самом деле, иначе найдется шаг U раньше T, на котором построен какой-то элемент множества x. Как показано выше, $G_U \in G_T$, а поскольку U находится перед S, то $G_U \in y$. Это противоречит выбору G_T. Доказательство закончено.

[1]) Называемая также аксиомой фундирования. — *Прим. ред.*

Ниже будет добавлена еще одна аксиома — аксиома выбора. Аксиоматическая система, состоящая из всех этих аксиом, обозначается через ZFC. Она обычно рассматривается как стандартная система аксиом для теории множеств.

§ 4. Развитие теории множеств

Мы собираемся лишь показать, как различные аксиомы участвуют в построении теории множеств, но не проводить это построение в деталях. Будет использоваться обозначение $\{x\colon \varphi(x)\}$ для множества таких x, что $\varphi(x)$. Более строго, $\{x\colon \varphi(x)\}$ вводится аксиомой

$$\forall x\,(x \in \{x\colon \varphi(x)\} \leftrightarrow \varphi(x)).$$

Однако перед введением этой аксиомы нужно доказать следующую формулу:

$$\exists! y \forall x\,(x \in y \leftrightarrow \varphi(x)).$$

Если такое y существует, то оно единственно по аксиоме объемности, и утверждение о существовании такого y и есть $\mathrm{Set}\{x\colon \varphi(x)\}$. Значит, мы можем использовать $\{x\colon \varphi(x)\}$ только в предположении, что уже доказано $\mathrm{Set}\{x\colon \varphi(x)\}$.

Будем писать $\{F(x)\colon \varphi(x)\}$ вместо $\{y\colon \exists x\,(\varphi(x) \wedge y = F(x))\}$. Таким образом, аксиому подстановки можно записать в виде $\mathrm{Set}\{F(x)\colon x \in y\}$.

Прежде всего введем обычные теоретико-множественные операции. Главной ролью аксиом при этом будет доказательство существования тех или иных множеств. Покажем, как это делается.

Сначала определим пустое множество

$$\varnothing = \{x\colon x \neq x\}.$$

Чтобы доказать его существование, возьмем какое-нибудь множество y. (Аксиома бесконечности гарантирует существование хотя бы одного множества. Из обычных аксиом логики также можно получить существование хотя бы одного множества.) Тогда $\forall x\,(x \neq x \to x \in y)$, и, следовательно, $\mathrm{Set}\{x\colon x \neq x\}$ по аксиоме выделения.

Теперь мы определим множество

$$\bigcup z = \{x\colon \exists y \in z\,(x \in y)\},$$
$$\mathscr{P}(y) = \{x\colon x \subseteq y\}.$$

Эти множества существуют по аксиомам объединения и степени. Множество $\bigcup z$ называется *объединением* z, а множество $\mathscr{P}(y)$ называется *степенью* y.

Далее, определяем множество, состоящее из x и y:

$$\{x,\ y\} = \{z\colon z = x \vee z = y\}.$$

Доказательство существования этого множества требует небольших усилий. Введем операцию F условиями $F(\varnothing) = x$ и $F(w) = y$ при $w \neq \varnothing$. Каково бы ни было множество v, совокупность $\{F(w)\colon w \in v\}$ будет множеством по аксиоме подстановки. Следовательно, в силу аксиомы выделения достаточно построить v так, чтобы x и y принадлежали $\{F(w)\colon w \in v\}$. Это означает, что v должно содержать как $\varnothing$, так и множество, отличное от $\varnothing$. Легко видеть, что такому свойству удовлетворяет множество $v = \mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))$.

Теперь можно определить булевы операции:

$$x \cup y = \bigcup \{x,\ y\},$$
$$x \cap y = \{z\colon z \in x \wedge z \in y\},$$
$$x - y = \{z\colon z \in x \wedge z \notin y\}.$$

Последние два множества существуют по аксиоме выделения.

Далее, можно определить множество, элементами которого являются множества $x_1, \ldots, x_n$ (и только они), индукцией по n:

$$\{x_1\} = \{x_1,\ x_1\},$$
$$\{x_1, \ldots, x_{n+1}\} = \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{x_{n+1}\}.$$

После этого без труда определяются и другие операции над множествами.

Теория множеств имеет дело не только с множествами, но также и с отношениями и функциями, которые являются множествами упорядоченных пар[1]). Обычно упорядоченную пару не рассматривают как множество, однако мы можем отождествить ее с множеством, если это множество обладает всеми желаемыми свойствами упорядоченной пары. К этим свойствам относится лишь способность полностью определяться своими первым и вторым членами. Иными словами, единственным существенным свойством упорядоченной пары является

$$\langle x,\ y\rangle = \langle z,\ w\rangle \to x = z \wedge y = w. \qquad (2)$$

Известно несколько определений $\langle x, y\rangle$, обеспечивающих выполнение записанной формулы; простейшим является

$$\langle x,\ y\rangle = \{\{x\},\ \{x,\ y\}\}.$$

Мы оставляем читателю проверку (2).

[1]) Мы отождествляем функцию f с множеством упорядоченных пар $\langle x, f(x)\rangle$, а не с множеством упорядоченных пар $\langle f(x), x\rangle$.

Теперь можно определить декартово произведение:

$$x \times y = \{\langle z, w\rangle: z \in x \wedge w \in y\}.$$

Чтобы показать его существование (как множества), заметим, что

$$z \in x \wedge w \in y \to \langle z, w\rangle \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(x \cup y)),$$

а затем используем аксиому выделения.

Можно обобщить аксиому подстановки на случай двух (или большего числа) аргументов:

$$\operatorname{Set}\{F(z, w): z \in x \wedge w \in y\}. \tag{3}$$

В самом деле, введем новую операцию G условием $G(\langle z, w\rangle) = F(z, w)$ и $G(v) = \varnothing$ в случае, когда v не является упорядоченной парой. (В силу (2) это определение корректно.) Тогда

$$\{F(z, w): z \in x \wedge w \in y\} = \{G(v): v \in x \times y\},$$

и поэтому (3) следует из аксиомы подстановки.

Теперь мы собираемся показать, что в нашей теории можно работать с обычными математическими объектами. Такие объекты строятся из чисел с помощью теоретико-множественных операций. Однако хорошо известно, что все числа (действительные, комплексные, рациональные) могут быть построены из натуральных чисел с помощью теоретико-множественных операций. Мы покажем, как определяются натуральные числа в ZFC.

Очевидно, что каждое натуральное число n должно быть отождествлено с каким-нибудь множеством; какое же множество целесообразнее выбрать? Естественным является выбор n-элементного множества, а из таких множеств напрашивается выбор множества всех натуральных чисел, меньших чем n. Таким образом, 0 отождествляется с пустым множеством $\varnothing$, 1 отождествляется с $\{0\}$, 2 с $\{0, 1\}$ и т. д. При этом операция перехода к следующему натуральному числу должна быть определена так:

$$\operatorname{Sc}(x) = x \cup \{x\}.$$

Будем говорить, что множество является *индуктивным*, если оно содержит 0 и замкнуто относительно операции Sc.

Натуральным числом назовем каждое множество, принадлежащее любому индуктивному множеству.

Нужно доказать аксиомы Пеано для так определенных натуральных чисел. Единственной аксиомой, проверка которой нетривиальна, является

$$\operatorname{Sc}(x) = \operatorname{Sc}(y) \to x = y. \tag{4}$$

Пусть $\operatorname{Sc}(x) = \operatorname{Sc}(y)$. По аксиоме регулярности множество $\{x, y\}$ содержит минимальный элемент, а в силу симметричности можно считать, что этим элементом является y. Тогда $x \notin y$. Но $x \in \operatorname{Sc}(x) = \operatorname{Sc}(y) = y \cup \{y\}$, и поэтому либо $x \in y$, либо $x = y$. Следовательно, $x = y$. (В случае, когда x и y являются натуральными числами, мы можем доказать (4) без использования аксиомы регулярности. Однако (4) иногда используется для произвольных множеств x и y.)

Аксиома бесконечности утверждает, что индуктивные множества существуют. Отсюда и из аксиомы выделения следует существование множества всех натуральных чисел.

Теперь видно, почему праэлементы не являются необходимыми: все объекты, которые мы хотели бы изучать, являются множествами или по крайней мере могут быть отождествлены с множествами. На самом деле лишь небольшое дополнительное усилие требуется для переформулировки нашей аксиоматической системы с тем, чтобы она допускала праэлементы, и это иногда бывает полезным.

Довольно удивительным является то, что мы можем определить все обычные математические объекты и доказать их свойства в ZFC. Несомненно, это показывает, что ZFC является очень сильной аксиоматической системой. Тем не менее мы не склонны преувеличивать это. Было бы ошибочным и бесполезным отождествить математику с ZFC или рассматривать ZFC как основание математики. Такой взгляд привел бы к тому, что объекты, неопределимые в ZFC, не считались бы математическими объектами, а факты, недоказуемые в ZFC, — математическими фактами. Это было бы бесплодным ограничением математики.

§ 5. Ординалы

Хотя понятие шага и фигурировало в нашем описании множеств, но оно не вошло в формулировки аксиом. Чтобы показать, что при этом ничего не потеряно, мы в ZFC определим шаги и докажем, что они имеют соответствующие свойства.

Мы собираемся отождествить шаги с определенными множествами, которые называются ординалами. Грубо говоря, ординалы получаются продолжением последовательности натуральных чисел.

Множество x называем *транзитивным*, если каждый элемент множества x является подмножеством x. Множество x называется *ординалом*, если x транзитивно и каждый элемент множества x также транзитивен. Для обозначения ординалов будем использовать греческие буквы.

5.1. Теорема. *Множество* 0 *есть ординал. Если* α — *ординал, то* $\operatorname{Sc}(\alpha)$ *также будет ординалом.*

Доказательство. Доказательство тривиально и оставляется читателю. □

Следствие. *Каждое натуральное число является ординалом.*

5.2. Теорема. *Каждый элемент ординала есть ординал.*

Доказательство. Пусть $x \in \alpha$. Тогда x транзитивно, и поэтому остается проверить, что каждый элемент y множества x является транзитивным множеством. Поскольку α транзитивно, то $x \subseteq \alpha$; следовательно, $y \in \alpha$, и поэтому y транзитивно, что и требовалось. □

Определим теперь для ординалов α и β:

$$\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta,$$

$$\alpha \leqslant \beta \leftrightarrow \alpha < \beta \vee \alpha = \beta.$$

Докажем сначала, что $<$ частично упорядочивает ординалы, т. е.

$$\neg(\alpha < \alpha), \tag{5}$$

$$\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \rightarrow \alpha < \gamma. \tag{6}$$

По аксиоме регулярности α является минимальным элементом множества $\{\alpha\}$. Это означает, что $\alpha \notin \alpha$, т. е. (5). А (6) есть следствие транзитивности γ. □

5.3. Теорема. *Если* $\forall \alpha((\forall \beta < \alpha\, \varphi(\beta)) \rightarrow \varphi(\alpha))$, *то* $\forall \alpha \varphi(\alpha)$.

Доказательство. Предположим, что посылка верна, но $\neg\varphi(\alpha_0)$, и получим противоречие. Пусть

$$x = \{\alpha \colon \alpha < \alpha_0 \wedge \neg\varphi(\alpha)\};$$

это множество существует потому, что каждое такое α принадлежит α_0. Более того, $x \neq \varnothing$, так как иначе посылка дала бы $\varphi(\alpha_0)$. Таким образом, x имеет минимальный элемент α. Если $\beta < \alpha$, то $\beta < \alpha_0$ по (6) и $\beta \notin x$ по выбору α. Значит, при $\beta < \alpha$ будет $\varphi(\beta)$. Теперь посылка дает $\varphi(\alpha)$, что противоречит выбору α. □

Теорема 5.3 говорит нам, что если мы хотим доказать $\varphi(\alpha)$ для произвольного ординала α, то можно предполагать, что $\varphi(\beta)$ выполняется при любом $\beta < \alpha$. Такой метод доказательства называется доказательством $\varphi(\alpha)$ *индукцией по* α; предположение о том, что $\varphi(\beta)$ выполняется для всех $\beta < \alpha$, называется *индуктивным предположением*.

Докажем теперь, что $<$ линейно упорядочивает ординалы, т. е.

$$\alpha < \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta < \alpha. \tag{7}$$

Обозначим (7) через $C(\alpha, \beta)$ и докажем $\forall \beta C(\alpha, \beta)$ индукцией по α. Для этого докажем $C(\alpha, \beta)$ индукцией по β (при фиксированном α). Таким образом, мы доказываем $C(\alpha, \beta)$ с помощью двух индуктивных предположений:

$$\forall \gamma < \alpha C(\gamma, \beta), \tag{8}$$

$$\forall \gamma < \beta C(\alpha, \gamma). \tag{9}$$

Ясно, что либо $\alpha = \beta$, либо $\alpha - \beta \neq \varnothing$, либо $\beta - \alpha \neq \varnothing$. Если $\alpha = \beta$, то $C(\alpha, \beta)$ очевидно. Предположим теперь, что $\alpha - \beta \neq \varnothing$. По теореме 5.2 и определению $<$ найдется такое γ, что $\gamma < \alpha$ и $\neg(\gamma < \beta)$. Согласно (8) будет $C(\gamma, \beta)$, т. е. либо $\gamma < \beta$, либо $\beta \leqslant \gamma$. Так как первое ложно, то выполняется $\beta \leqslant \gamma$. Теперь, поскольку $\gamma < \alpha$, то из (6) следует $\beta < \alpha$, т. е. $C(\alpha, \beta)$. Аналогичное доказательство (с использованием (9) вместо (8)) проходит и в случае $\beta - \alpha \neq \varnothing$.

Итак, (7) доказано. С помощью этого утверждения докажем

$$\alpha \leqslant \beta \leftrightarrow \alpha \subseteq \beta. \tag{10}$$

В самом деле, если $\alpha \leqslant \beta$, то из $\gamma < \alpha$ следует $\gamma < \beta$ по (6), и $\alpha \subseteq \beta$ вытекает из теоремы 5.2. Если же $\neg(\alpha \leqslant \beta)$, то $\beta < \alpha$ согласно (7) и $\neg(\beta < \beta)$ согласно (5). Таким образом, $\beta \in \alpha - \beta$, т. е. $\neg(\alpha \subseteq \beta)$.

Будем говорить, что α есть *наименьший ординал такой, что* $\varphi(\alpha)$, если имеет место $\varphi(\alpha)$, но для любого ординала $\beta < \alpha$ выполняется $\neg\varphi(\beta)$. В силу утверждения (7) существует не более одного такого ординала α.

5.4. Теорема. *Если* $\exists \alpha \varphi(\alpha)$, *то существует наименьший ординал* α *такой, что* $\varphi(\alpha)$.

Доказательство. Предположим, что таких α нет, и докажем $\neg\varphi(\alpha)$ индукцией по α. Если $\varphi(\beta)$, то из индуктивного предположения следует $\neg(\beta < \alpha)$, т. е. $\alpha \leqslant \beta$. Таким образом, $\neg\varphi(\alpha)$, так как иначе α было бы наименьшим ординалом таким, что $\varphi(\alpha)$. □

Существуют два тривиальных примера наименьших ординалов: 0 есть наименьший ординал, а $\mathrm{Sc}(\alpha)$ есть наименьший ординал β такой, что $\alpha < \beta$.

5.5. Теорема. *Если x есть множество ординалов, то* $\bigcup x$ *является наименьшим ординалом* α *таким, что* $\forall \beta \in x (\beta \leqslant \alpha)$.

Доказательство. Объединение множества, состоящего из транзитивных множеств, транзитивно; поэтому $\bigcup x$ транзитивно. Каждый элемент множества $\bigcup x$ принадлежит некоторому ординалу из x и, следовательно, является транзитивным. Таким образом, $\bigcup x$ есть ординал. Теперь теорема следует из (10). □

Следствие. *Если x есть множество ординалов, то существует ординал, превосходящий все ординалы из x.*

Доказательство. Нужно взять $\alpha = \mathrm{Sc}(\bigcup x)$. □

Согласно этому следствию существует ординал, не являющийся натуральным числом. Наименьший такой ординал обозначается через ω. Поскольку $\omega \neq 0$ и 0 есть наименьший ординал, то

$$0 < \omega. \tag{11}$$

Также имеет место

$$\alpha < \omega \to \mathrm{Sc}(\alpha) < \omega. \tag{12}$$

В самом деле, если $\alpha < \omega$, то $\mathrm{Sc}(\alpha) \leqslant \omega$, так как $\mathrm{Sc}(\alpha)$ есть наименьший ординал, больший, чем α. Но поскольку $\alpha < \omega$, то α — натуральное число. Тем самым $\mathrm{Sc}(\alpha)$ — также натуральное число, и, следовательно, $\mathrm{Sc}(\alpha) \neq \omega$.

Из (11) и (12) следует, что каждое натуральное число принадлежит ω. Но каждый элемент ω является ординалом, меньшим, чем ω, и тем самым является натуральным числом. Таким образом, ω есть множество всех натуральных чисел.

Теперь обратимся к определениям по индукции. Идея состоит в том, что мы хотим определить $F(\alpha)$ через α и $F(\beta)$ для $\beta < \alpha$. Все эти $F(\beta)$ можно собрать в одно множество $F \upharpoonright \alpha$, определяемое равенством

$$F \upharpoonright \alpha = \{\langle \beta, F(\beta)\rangle : \beta < \alpha\}.$$

5.6. Теорема. *Если G есть бинарная операция, то существует такая унарная операция F, что $F(\alpha) = G(\alpha, F \upharpoonright \alpha)$ для всех ординалов α.*

Доказательство. Под α-функцией будем понимать функцию f, определенную на α и удовлетворяющую равенству $f(\beta) = G(\beta, f \upharpoonright \beta)$ для всех $\beta < \alpha$. Легко видеть, что если f есть α-функция и $\beta < \alpha$, то $f \upharpoonright \beta$ будет β-функцией.

Покажем, что для каждого α существует не более одной α-функции. Действительно, предположим, что f и g являются α-функциями, и докажем

$$\beta < \alpha \to f(\beta) = g(\beta)$$

индукцией по β. Если $\gamma < \beta$, то $f(\gamma) = g(\gamma)$ по индуктивному предположению. Таким образом, $f \upharpoonright \beta = g \upharpoonright \beta$, и поэтому

$$f(\beta) = G(\beta, f \upharpoonright \beta) = G(\beta, g \upharpoonright \beta) = g(\beta).$$

Если существует α-функция f, то полагаем $F(\alpha) = G(\alpha, f)$; в противном случае полагаем $F(\alpha) = 0$. (Этот второй случай на самом деле не имеет места ни при каком α.)

Докажем для начала, что если α-функция существует, то выполняется $F(\alpha) = G(\alpha, F \upharpoonright \alpha)$. Достаточно показать, что если f есть α-функция, то $F \upharpoonright \alpha = f$. Если $\beta < \alpha$, то $f \upharpoonright \beta$ является β-функцией; поэтому $F(\beta) = G(\beta, f \upharpoonright \beta) = f(\beta)$, так как f есть α-функция. Таким образом, $F \upharpoonright \alpha = f$, что и требовалось.

Осталось проверить, что для каждого α существует α-функция. Докажем, что $F \upharpoonright \alpha$ будет α-функцией, индукцией по α.

Пусть $f = F \upharpoonright \alpha$. Если $\beta < \alpha$, то из индуктивного предположения и результата предыдущего абзаца следует $F(\beta) = G(\beta, F \upharpoonright \beta)$. Но это равенство эквивалентно равенству $f(\beta) = G(\beta, f \upharpoonright \beta)$, которое и требовалось установить. □

На практике теорема 5.6 обосновывает любое определение, в котором $F(\alpha)$ выражается через α и $F(\beta)$ для $\beta < \alpha$. Например, пусть x — произвольное множество. Положим $F(\alpha)$ равным $\{x\}$ при $\alpha = 0$, равным $\bigcup (F(\beta))$ при $\alpha = \mathrm{Sc}(\beta)$ и равным $\bigcup \{F(\beta) : \beta < \alpha\}$ в остальных случаях. Нетрудно подобрать G так, что теорема 5.6 дает эту операцию F. Важность рассмотренного примера заключается в том, что $F(\omega)$ есть транзитивное множество, содержащее x как элемент. В самом деле, по (11) и (12) $F(\omega)$ будет объединением всех $F(\alpha)$ для $\alpha < \omega$. В частности, $F(0) \subseteq F(\omega)$, и поэтому $x \in F(\omega)$. Далее, если $y \in F(\omega)$, то $y \in F(\alpha)$ для некоторого $\alpha < \omega$. Это означает, что $y \subseteq \bigcup (F(\alpha)) = F(\mathrm{Sc}(\alpha)) \subseteq F(\omega)$ по (12). Таким образом, $F(\omega)$ является транзитивным множеством.

5.7. Теорема. *Если $\forall x ((\forall y \in x \varphi(y)) \to \varphi(x))$, то $\forall x \varphi(x)$.*

Доказательство. Предположим, что посылка выполняется, но $\neg\varphi(z)$, и получим отсюда противоречие. Как показано выше, существует транзитивное множество w, содержащее z. Полагаем $v = \{x : x \in w \wedge \neg\varphi(x)\}$. Поскольку $z \in v$, то v имеет минимальный элемент $x \in v$. Если теперь $y \in x$, то $y \in w$ (так как w транзитивно) и $y \notin v$, т. е. $\varphi(y)$. В этой ситуации посылка теоремы дает $\varphi(x)$, что противоречит выбору $x \in v$. □

Теорема 5.7 говорит нам, что если мы хотим доказать $\varphi(x)$ для произвольного множества x, то можно предполагать, что $\varphi(y)$ выполняется для всех $y \in x$. Такой метод доказательства называется доказательством $\varphi(x)$ с помощью *$\in$-индукции по x*; предположение о том, что $\varphi(y)$ справедливо для всех $y \in x$, называется *индуктивным предположением*.

Теперь мы отождествляем шаги с ординалами, а отношение *раньше* — с порядком $<$ на ординалах. Скажем, что множество x строится на шаге α, если $x \subseteq R(\alpha)$, где операция R определена индукцией по α следующим образом:

$$R(\alpha) = \bigcup \{\mathscr{P}(R(\beta)) : \beta < \alpha\}\ ^{1)}.$$

Таким образом, мы определили понятия § 2 в ZFC. Теперь уже можно доказать соответствующие свойства этих понятий.

По определению R, выполняется

$$y \in R(\alpha) \leftrightarrow \exists \beta < \alpha (y \subseteq R(\beta)); \tag{13}$$

таким образом, y принадлежит $R(\alpha)$, если и только если y строится раньше α. Следовательно, x строится на шаге α, если

[1]) При $\alpha = 0$ это определение дает $R(\alpha) = \varnothing$, так как множество в фигурных скобках оказывается пустым при $\alpha = 0$. — *Прим. перев.*

и только если каждый элемент множества x построен раньше α. Это и есть первое основное свойство процесса построения множеств.

Далее, мы должны доказать, что если каждый элемент некоторой совокупности построен раньше α, то эта совокупность является множеством. Согласно (13) сказанное записывается следующей формулой:

$$\forall x(\varphi(x) \rightarrow x \in R(\alpha)) \rightarrow \mathrm{Set}\{x\colon \varphi(x)\}.$$

Но записанная формула есть следствие аксиомы выделения.

Наконец, нужно доказать, что каждое множество строится на каком-нибудь шаге, т. е.

$$\exists\alpha(x \subseteq R(\alpha)). \qquad (14)$$

Доказываем это утверждение $\in$-индукцией по x. Пусть $F(y)$ есть наименьший ординал β такой, что $y \subseteq R(\beta)$, или 0, если таких β нет. Используя следствие к теореме 5.5, выбираем ординал α, превосходящий все ординалы из $\{F(y)\colon y \in x\}$. Если $y \in x$ и $\beta = F(y)$, то $y \subseteq R(\beta)$ по индуктивному предположению и в силу $\beta < \alpha$. Из (13) следует, что $y \in R(\alpha)$. Таким образом, $x \subseteq R(\alpha)$, что и требовалось.

Если мы заменим x на $\{x\}$ в утверждении (14), то получим: каждое множество принадлежит какому-нибудь $R(\alpha)$. Этот факт часто используется. Например, можно вводить операцию F на всех множествах путем определения ее на всех множествах из $R(\alpha)$ индукцией по α. Другое применение будет указано в следующем параграфе. Итак, мы видим, что шаги полезны не только при проверке аксиом, но и в доказательстве теорем.

§ 6. Аксиома выбора

Функцией выбора на множестве x называется функция f с областью определения $x-\{\varnothing\}$ такая, что $f(y) \in y$ для всех y из области определения f. *Аксиома выбора* утверждает, что для каждого множества x существует функция выбора на x. (Строго говоря, аксиомой выбора является перевод этого предложения на язык теории множеств.)

Почему аксиома выбора истинна? Мы уже знаем, что $x \times \bigcup x$ есть множество, и, следовательно, оно строится на некотором шаге S. Тогда каждая пара $\langle y, z\rangle$, где $z \in y \wedge y \in x$ построена раньше S. На шаге S мы можем взять одну таку пару $\langle y, z\rangle$ для каждого y из $x-\{\varnothing\}$ и построить множеств всех таких $\langle y, z\rangle$. Это множество и будет искомой функцией вы бора на x.

В этом рассуждении есть одно слабое место: что́ мы имее в виду, когда говорим, что можно выбрать *одну* пару $\langle y, z\rangle$ для каждого y? Конечно, мы не имеем в виду, что человек фактически в состоянии выбрать эти пары, так как возможен случай бесконечного числа таких пар. Мы также не имеем в виду, что есть какой-то закон для выбора таких пар, поскольку независимо от нашего понимания слова *закон* мы не видим причин, почему такой закон должен быть для каждого множества x. Таким образом, мы имеем в виду лишь существование совокупности множеств, содержащей ровно по одной паре $\langle y, z\rangle$ для каждого y из $x-\{\varnothing\}$. Если совокупность понимать как произвольное разбиение рассматриваемых объектов на принадлежащие и не принадлежащие к этой совокупности, то разумно было бы утверждать, что такая совокупность существует.

Аксиома выбора имеет много приложений в математике; некоторые из них рассматриваются в гл. 2. В теории множеств наиболее интересными являются приложения к теории кардиналов. Сделаем краткое введение в эту теорию.

Будем говорить, что множества x и y ***равномощны***, и писать $x \sim y$, если существует взаимно однозначное отображение x на y. Тривиально проверяется, что $\sim$ есть отношение эквивалентности. Мы хотим сопоставить каждому множеству x другое множество $|x|$, называемое *кардиналом* или *мощностью* x, так, чтобы

$$|x| = |y| \leftrightarrow x \sim y. \qquad (15)$$

Напрашивается использование классов эквивалентности, т. е. $|x| = \{y\colon y \sim x\}$. Но это не проходит, поскольку $\{y\colon y \sim x\}$ не является множеством при $x \neq \varnothing$. Предыдущий параграф подсказывает такое определение: $|x| = \{y\colon y \in R(\alpha) \wedge y \sim x\}$, где α есть наименьший ординал такой, что $\exists y \in R(\alpha)\ (y \sim x)$. (Такой ординал существует, так как $x \sim x$ и x принадлежит некоторому $R(\alpha)$.) Хотя такое определение достаточно приемлемо, существует еще более удобное определение. Именно, определим $|x|$ как наименьший ординал, равномощный с x. Прежде всего, нужно доказать, что такой ординал существует.

6.1. Теорема. *Если f является функцией выбора на $\mathscr{P}(x)$, то существует взаимно однозначное отображение g некоторого ординала α на множество x, удовлетворяющее равенству $g(\beta) = f(x-\{g(\gamma)\colon \gamma < \beta\})$ для всех $\beta < \alpha$.*

Доказательство. Определяем F индукцией следующим образом:

$$F(\alpha) = f(x - \{F(\beta)\colon \beta < \alpha\}).$$

(Здесь в качестве $f(0)$ можно взять любое множество, например $\varnothing$.) Тогда

$$x - \{F(\beta)\colon \beta < \alpha\} \neq \varnothing \rightarrow F(\alpha) \in x \wedge \forall\beta < \alpha\,(F(\beta) \neq F(\alpha)). \qquad (16)$$

Докажем сначала, что $x \subseteq \{F(\beta)\colon \beta < \alpha\}$ для некоторого ординала α. Если это не так, то (16) показывает, что F взаимно однозначно отображает совокупность всех ординалов в множество x. Тогда обратная к F операция отображает некоторое подмножество множества x на совокупность всех ординалов, ввиду чего эта совокупность является множеством по аксиоме подстановки. Получилось противоречие со следствием к теореме 5.5.

Пусть α — наименьший ординал такой, что $x \subseteq \{F(\beta) : \beta < \alpha\}$. Согласно (16) $F \restriction \alpha$ будет отображать α взаимно однозначно на x и, следовательно, $g = F \restriction \alpha$ и есть искомое отображение. □

Итак, мы обосновали возможность определить $|x|$ как наименьший ординал, равномощный множеству x. Как отмечено выше, $|x|$ называется *кардиналом* x. Множество называется *кардиналом*, если оно есть кардинал некоторого множества. Каждый кардинал является ординалом, и ординал α будет кардиналом, если и только если $\alpha = |\alpha|$.

Теперь мы собираемся исследовать отношение $<$ на кардиналах. Во-первых, докажем

$$x \subseteq \delta \to |x| \leqslant \delta. \tag{17}$$

Определим функцию выбора f на $\mathscr{P}(x)$ следующим образом: если $y \in \mathscr{P}(x) - \{\varnothing\}$, то $f(y)$ есть наименьший ординал в множестве y. Пусть g и α таковы, как в теореме 6.1. Легко проверяется, что

$$\beta < \gamma \to g(\beta) < g(\gamma). \tag{18}$$

Теперь докажем

$$\beta < \alpha \to \beta \leqslant g(\beta) \tag{19}$$

индукцией по β. Предположим, что $\beta < \alpha$, но $g(\beta) < \beta$. Из (18) следует $g(g(\beta)) < g(\beta)$. Но так как $g(\beta) < \beta$, то индуктивное предположение дает $g(\beta) \leqslant g(g(\beta))$. Полученное противоречие доказывает (19).

Теперь завершаем доказательство утверждения (17). Предположим, что $\delta < |x|$. Поскольку $|x| \leqslant \alpha$, то $\delta < \alpha$, и, следовательно, $\delta \leqslant g(\delta)$ по (19). Но $g(\delta) \in x$. Значит, $g(\delta) \in \delta$, т. е. $g(\delta) < \delta$. Это дает противоречие, завершающее доказательство (17).

6.2. Теорема. *Пусть α и β — кардиналы. Тогда $\alpha \leqslant \beta$, если и только если найдется множество, имеющее кардинал β, некоторое подмножество которого имеет кардинал α.*

Доказательство. Если $\alpha \leqslant \beta$, то $\alpha \subseteq \beta$ по (10). Так как $|\alpha| = \alpha$ и $|\beta| = \beta$, то β будет искомым множеством. Пусть теперь $|x| = \alpha$, $|y| = \beta$, $x \subseteq y$. Тогда существует взаимно однозначное отображение y на β; оно отображает x на некоторо множество $z \subseteq \beta$. Таким образом, $\alpha = |x| = |z| \leqslant \beta$ по (17).

Довольно легко можно показать, что каждое натуральное число есть кардинал и ω — также кардинал. Бо́льшие кардиналы могут быть получены благодаря следующей теореме:

6.3. Теорема. *Для любого множества x выполняется неравенство $|x| < |\mathscr{P}(x)|$.*

Доказательство. Существует взаимно однозначное отображение x в $\mathscr{P}(x)$. По теореме 6.2 имеем $|x| \leqslant |\mathscr{P}(x)|$. Предположим теперь, что $|x| = |\mathscr{P}(x)|$, и получим противоречие. Согласно (15) существует взаимно однозначное отображение f множества x на $\mathscr{P}(x)$. Пусть $y = \{z : z \in x \wedge z \notin f(z)\}$. Тогда $y = f(w)$ для некоторого $w \in x$. Теперь получаем противоречие

$$w \in y \leftrightarrow w \notin f(w) \leftrightarrow w \notin y. \ \square$$

Это краткое введение в теорию кардиналов дает некоторое представление о ней, но, возможно, не раскрывает ключевой роли аксиомы выбора. Без использования этой аксиомы мы можем определить кардиналы первым из упомянутых выше способов. При этом можно определить, что $\alpha \leqslant \beta$ (для кардиналов α и β), если существует множество, имеющее кардинал β, некоторое подмножество которого имеет кардинал α. При таком определении без помощи аксиомы выбора невозможно доказать, что для произвольных кардиналов α и β выполняется $\alpha \leqslant \beta \vee \beta \leqslant \alpha$.

В заключение этого параграфа покажем, как лемма Цорна следует из аксиомы выбора. Частично упорядоченное множество называется *индуктивно упорядоченным*, если каждое линейно упорядоченное подмножество этого множества имеет верхнюю грань. Лемма Цорна утверждает, что каждое индуктивно упорядоченное множество x имеет максимальный элемент.

Для доказательства возьмем какую-нибудь функцию выбора f на $\mathscr{P}(x)$. Определим индукцией операцию F следующим образом. Пусть x_α есть совокупность всех таких $y \in x$, что $F(\beta) < y$ для любого $\beta < \alpha$. Положим $F(\alpha) = f(x_\alpha)$ при $x_\alpha \neq \varnothing$ и $F(\alpha) = 0$ при $x_\alpha = \varnothing$. Аналогично доказательству теоремы 6.1 можно показать, что $x_\alpha = \varnothing$ для некоторого α. Выберем наименьшее такое α. Тогда по выбору $F(\beta)$ при $\gamma < \beta < \alpha$ будет $F(\gamma) < F(\beta)$. Следовательно, множество $\{F(\beta) : \beta < \alpha\}$ линейно упорядочено. Значит, оно имеет верхнюю грань y; это y и будет искомым максимальным элементом, так как любой больший элемент множества x должен был бы принадлежать множеству x_α.

§ 7. Классы

Мы уже отмечали, что в языке теории множеств можно говорить и о некоторых совокупностях множеств, не являющихся множествами. Остановимся на этом более подробно.

Впредь $\{x\colon \varphi(x)\}$ обозначает совокупность таких множеств x, что имеет место $\varphi(x)$, даже если эта совокупность не является множеством. Такие совокупности называются *классами*. Точнее, если каждая свободная переменная формулы $\varphi(x)$, отличная от x, замещена каким-нибудь множеством, то $\{x\colon \varphi(x)\}$ является определимой совокупностью, и каждую такую совокупность мы называем *классом*.

Каждое множество x есть класс, потому что $x=\{y\colon y\in x\}$. Но не каждый класс является множеством. Например, парадокс Рассела показывает, что $\{x\colon x\notin x\}$ не является множеством, а следствие к теореме 5.5 показывает, что совокупность всех ординалов (очевидно, являющаяся классом) также не является множеством. Класс, который не является множеством, мы называем *собственным* классом.

Мы хотим, чтобы $\{x\colon \varphi(x)\}$ было определяемым символом, т. е. чтобы каждое предложение, содержащее такие символы, было сокращением некоторого предложения в языке теории множеств. Но мы не можем этого сделать методом § 4 ввиду того, что символ $\{x\colon \varphi(x)\}$ получил новое значение. Поэтому рассмотрим способы вхождения $\{x\colon \varphi(x)\}$ в предложения.

Желательно разрешить выражению $\{x\colon \varphi(x)\}$ входить как перед, так и после знаков $=$ и $\in$. В случае, когда оно встречается сразу после $\in$, положим

$$y\in\{x\colon \varphi(x)\}\longleftrightarrow\varphi(y).$$

Перед тем как продвигаться дальше, введем следующее определение. *Термом* называется выражение, которое является либо переменной, либо записью вида $\{x\colon \varphi(x)\}$. Для обозначения термов используем буквы A, B, C.

Если $\{x\colon \varphi(x)\}$ встречается перед или после знака $=$, то

$$A=B\longleftrightarrow\forall x\,(x\in A\longleftrightarrow x\in B). \tag{20}$$

Вхождения $x\in A$ и $x\in B$ в правой части эквивалентности раскрываются с помощью предыдущего определения.

Строго говоря, (20) является определением, только когд по крайней мере один из термов A, B не является переменной если же оба этих терма являются переменными, то $A=B$ уж будет выражением языка теории множеств. Тем не менее (20 будет истинно и в этом случае благодаря аксиоме объемности

Наконец, если $\{x\colon \varphi(x)\}$ непосредственно предшествует зна ку $\in$, то

$$\{x\colon \varphi(x)\}\in B\longleftrightarrow\exists y\,(y=\{x\colon \varphi(x)\}\wedge y\in B).$$

Таким образом, $\{x\colon \varphi(x)\}\in B$ не может быть истинным, есл $\{x\colon \varphi(x)\}$ не является множеством. Следовательно, как мы ожидали, каждый элемент класса является множеством.

Теперь нужно позаботиться об одной технической детали. Поскольку отношение $=$ между термами является теперь определяемым, а не логическим понятием, то свойства этого отношения должны доказываться, а не извлекаться из аксиом логики. Это доказательство немного скучно, но несложно; из всех аксиом теории множеств оно использует лишь аксиому объемности.

Полезным классом является класс всех множеств, определяемый следующим образом:

$$\mathrm{V}=\{x\colon x=x\}.$$

Отметим, что $A\in\mathrm{V}$ есть один из способов выражения того обстоятельства, что A является множеством. В частности, наше предыдущее обозначение $\mathrm{Set}\{x\colon \varphi(x)\}$ можно заменить на $\{x\colon \varphi(x)\}\in\mathrm{V}$.

В обращении с классами необходима определенная осторожность. Мы теперь можем использовать $\{x\colon \varphi(x)\}$, не доказав предварительно, что эта совокупность есть множество. Однако это не означает, что можно утверждать $\psi(\{x\colon \varphi(x)\})$, если уже доказано $\forall y\psi(y)$. Поскольку $\forall y$ означает «для всех *множеств* y», то сначала необходимо доказать, что $\{x\colon \varphi(x)\}$ является множеством.

Теоретико-множественные операции и понятия естественным образом продолжаются на классы. Так, можно определить

$$A\cap B=\{x\colon x\in A\wedge x\in B\}.$$

Однако снова необходима некоторая осторожность. Мы можем определить $\{A\}=\{x\colon x=A\}$, но нужно иметь в виду, что если A есть собственный класс, то $\{A\}$ будет пустым множеством (так как ни одно множество не равно A).

Если мы имеем дело с классами, то естественно разрешить отношениям и функциям быть классами (а не только множествами) упорядоченных пар. При таком подходе теоретико-множественные операции (над множествами) могут рассматриваться как функции. Например, операция $\bigcup$ становится классом всех таких троек $\langle\langle y,z\rangle,x\rangle$, что $x=y\cup z$. (Легко видеть, что этот класс является собственным.)

Теперь мы без труда можем выразить все, что хотим сказать о каком-то одном классе. Однако ни одна формула теории множеств ничего не может сказать обо всех классах. Покажем на двух примерах, как эту трудность можно устранить.

Первым примером будет доказательство простейшего свойства классов: каждый класс равен самому себе. Чтобы показать это, нужно доказать равенство $A=A$ для любого терма A. Для этого заметим, что, согласно (20), $A=A$ означает

$\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in A)$, а последнее утверждение следует из аксиом логики.

Этот простой пример иллюстрирует общую процедуру. Мы доказываем истинность какого-нибудь утверждения для всех классов тем, что докажем $\varphi(A)$ для произвольного терма A. Для этого надо доказать не одну формулу языка теории множеств, а бесконечно много формул, по одной для каждого терма A. Но обычно это несущественно, так как за редкими исключениями доказательство одно и то же для всех A.

Все оказывается несколько более сложным, когда мы хотим утверждать существование класса с определенными свойствами. Проиллюстрируем ситуацию, переформулировав теорему 5.6 с тем, чтобы в ней речь шла о классах, а не об операциях. Пусть $\varphi(A, B)$ есть результат перевода на язык теории множеств следующего выражения: если A есть функция с областью определения $V \times V$, то B есть функция, определенная на классе всех ординалов, удовлетворяющая равенству $B(\alpha) = A(\alpha, B \upharpoonright \alpha)$ для всех α. Тогда теорема, о которой идет речь, интуитивно выражается посредством $\forall A \exists B \varphi(A, B)$. Но эта запись не является формулой языка теории множеств даже в смысле введенных выше правил обращения с термами, поскольку термы, не являющиеся переменными, не могут стоять после кванторов.

Что значит доказать $\forall A \exists B \varphi(A, B)$ в ZFC? Анализ нашего доказательства теоремы 5.6 дает ответ. Это значит, что мы должны показать, как по данному произвольному терму A можно построить другой терм B так, чтобы затем можно было доказать $\varphi(A, B)$ в ZFC.

Эти процедуры делают возможным обращение с любыми предложениями о классах. Имеется и еще один путь, состоящий в расширении языка введением специальных переменных для классов и разрешении таким переменным появляться после кванторов. Этот путь дает более простое и непосредственное решение проблем, обсуждавшихся выше. Однако существует и недостаток: дополнительная символика приносит и дополнительные хлопоты при проведении доказательств непротиворечивости. В целом в настоящее время существует тенденция придерживаться языка теории множеств и использовать методы, изложенные в этом параграфе.

§ 8. Новые аксиомы

Наиболее значительным открытием в теории множеств за последние годы является открытие невозможности решения средствами ZFC многих важных нерешенных проблем теории множеств. Среди них — гипотеза континуума и проблема Суслина. Было бы интересно найти новые аксиомы, которые ре-

шали бы эти проблемы. Попробуем познакомить читателя с тем, что сделано в этой области и что еще предстоит сделать.

Как можно искать новые аксиомы? Одна идея вытекает из материала § 4. Там сформулированы два принципа следующего вида: каждая *совокупность* множеств, удовлетворяющая определенным условиям, является множеством. Когда мы переходим к формулировке этих принципов в виде аксиом в языке теории множеств, мы можем сказать только, что каждый *класс*, удовлетворяющий этим условиям, является множеством. Нетривиальность этого момента обнаруживается некоторыми моделями теории множеств, используемыми в доказательствах непротиворечивости. Эти модели всегда имеют множество, принадлежащее рассматриваемой модели, некоторое подмножество которого этой модели не принадлежит.

К несчастью, затруднительно иметь дело с совокупностями, которые не являются классами. Рассмотрим, например, подход, связанный с добавлением новых переменных, обозначающих произвольные совокупности. Нетрудно написать аксиомы, которые говорят, что каждая совокупность, имеющая определенные свойства, является множеством. Однако этими аксиомами нельзя пользоваться, пока нет аксиом, утверждающих существование совокупностей. Очевидными аксиомами такого вида являются аксиомы, утверждающие, что каждый класс есть совокупность. Когда такие аксиомы введены, мы приходим к тому, с чего начали.

Лучшей была бы идея ввести в язык символы для новых операций над множествами так, чтобы было больше совокупностей вида $\{x: \varphi(x)\}$. Конечно, такие операции должны в самом деле быть новыми, т. е. они не должны быть определимыми в языке теории множеств. В настоящее время известно очень мало таких операций; к тому же их введение в язык не решает ни одной из открытых проблем теории множеств. Таким образом, мы ничего не достигаем, используя этот подход.

Использование произвольных совокупностей может происходить другим путем. Если $\varphi(x)$ есть формула некоторого разумного языка, то мы можем думать о ней как о формуле, дающей закон для определения, какие множества принадлежат совокупности $\{x: \varphi(x)\}$. Как было отмечено при обсуждении аксиомы выбора, нет оснований считать, что каждая совокупность должна иметь такой закон. Если бы мы смогли глубже проанализировать понятие совокупности, построенной не в соответствии с каким-нибудь законом, то мы могли бы получить другие аксиомы, помимо аксиомы выбора, использующие такие совокупности, или по крайней мере найти более приемлемые аргументы для принятия самой аксиомы выбора.