Домашнее задание 8

Задачи, отмеченные звездочкой, нужно сдать письменно. Крайний срок сдачи всех задач (письменных и устных) — 12.12.

Задача 1. Пусть ω — стандартная симплектическая структура на $\mathbb{C}P^1$. Напишите формулу для формы ω в аффинной карте.

Задача 2. Рассмотрим симплектическую форму $\omega = y\,dx \wedge dy$ в верхней полуплоскости $y > 0$. Найдите координаты Дарбу в окрестности каждой точки верхней полуплоскости.

Задача 3. Пусть M — компактное многообразие, ω_0 и ω_1 — две симплектические структуры на M, определяющие один и тот же класс когологий де Рама. Предположим, что форма $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1$ является симплектической структурой на M при любом $t \in [0,1]$. Докажите, что существует диффеоморфизм $g : M \to M$, такой, что $g^*\omega_1 = \omega_0$.

Задача 4. * Найдите все такие $n \times n$ матрицы A, для которых найдется гладкий путь $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U(n)$ со свойством

$$A = \frac{d}{dt}\gamma(t)\,|_{t=0}\,.$$

Тот же вопрос для групп $SU(n)$, $O(n)$ и $SO(n)$.

Задача 5. Проверьте, что касательное пространство к $SL_2(\mathbb{C})$ в точке E (единичная матрица) совпадает с пространством всех *бесследных* 2×2-матриц, т.е. матриц со следом 0. Мы отождествляем касательные пространства к $SL_2(\mathbb{C})$ с их образами при вложении в пространство всех 2×2-матриц.

Задача 6. * Пусть $\hat{X}$ — левоинвариантное векторное поле на $SL_2(\mathbb{C})$, такое, что значение поля $\hat{X}$ в точке E совпадает с данной бесследной матрицей X. Проверьте, что коммутатор векторных полей $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ является левоинвариантным векторным полем $\hat{Z}$, где $Z = XY - YX$ — матричный коммутатор.

Задача 7. * *Пуассоновой структурой* на многообразии M называется билинейное над $\mathbb{R}$ кососимметрическое отображение $\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, такое, что

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0, \quad \{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}$$

для любых двух гладких функций f, $g \in C^\infty(M)$. Докажите, что на всяком симплектическом многообразии скобка Пуассона задает пуассонову структуру.

Задача 8. Определите гамильтоновы векторные поля на произвольном пуассоновом многообразии таким образом, чтобы это понятие обобщало гамильтоновы векторные поля на симплектическом многообразии.