Листок 6

Задачи, отмеченные звездочкой, нужно сдать письменно. Крайний срок сдачи всех задач (письменных и устных) — 21.11.

Пусть f и g — гладкие функции на симплектическом многообразии M. Определим их *скобку Пуассона* по формуле

$$\{f, g\} = X_f(g).$$

Задача 1. * Проверьте, что в координатном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ со стандартной симплектической структурой,

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}.$$

Задача 2. Функция F называется *первым интегралом* векторного поля X, если F постоянна вдоль любой траектории этого векторного поля. Проверьте, что F является первым интегралом гамильтонова векторного поля X_H тогда и только тогда, когда $F, H = 0$.

Задача 3. * Пусть гамильтониан механической системы имеет вид

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \phi(q_1^2 + q_2^2),$$

где ϕ — гладкая функция одной переменной. Проверьте, что функция $F(q_1, q_2, p_1, p_2) = p_1 q_2 - p_2 q_1$ является первым интегралом системы.

Задача 4. * Докажите следующие свойства скобки Пуассона:

$$\begin{array}{cc} (a) & \{f, g\} = \omega(X_g, X_f) \\ (b) & \{f, g\} = -\{g, f\} \\ (c) & \{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\} \\ (d) & \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \end{array}$$

Задача 5. Пусть группа G (конечная или бесконечная) действует симплектоморфизмами на симплектическом многообразии (M, ω), т.е. $g^*\omega = \omega$ для всякого $g \in G$. Докажите, что пространство $C^\infty(M)^G$ всех гладких G-инвариантных функций на M (т.е. таких гладких функций $f : M \to \mathbb{R}$, что $f(g \cdot x) = f(x)$ для всех $x \in M$, $g \in G$) инвариантно относительно взятия скобки Пуассона, т.е.

$$\forall F, H \in C^\infty(M)^G \quad \{F, H\} \in C^\infty(M)^G.$$

Задача 6. Проверьте, что при замене координат из $SL_2(\mathbb{R})$ символический вектор $(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x})$ преобразуется так же, как вектор (x, y). Выведите отсюда, что выражение $I(f) = f(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x})f(x, y)$, т.е. результат применения дифференциального оператора $f(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x})$ к однородному многочлену f от переменных x и y является инвариантом. Вычислите этот инвариант для многочленов степени 2, 3 и 4.