Листок 5

Задачи, отмеченные звездочкой, нужно сдать письменно. Крайний срок сдачи всех задач (письменных и устных) — 14.11.

Задача 1. Пусть β — гладкая 1-форма на многообразии M, а α — гладкая 2-форма на многообразии M, такая, что

$$\alpha(A, B) = A\beta(B) - B\beta(A)$$

для любой пары коммутирующих векторных полей A и B. Докажите, что $\alpha = d\beta$.

Задача 2. * Проверьте, что дифференциал всякой гладкой 2-формы α, определенный по формуле

$$d\alpha(X, Y, Z) = X\alpha(Y, Z) + Z\alpha(X, Y) + Y\alpha(Z, X) -$$
$$-\alpha([X, Y], Z) - \alpha([Z, X], Y) - \alpha(Y, [Z, X]).$$

является гладкой 3-формой.

Задача 3. На торе $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ с координатами (x, y) (эти координаты рассматриваются как действительные числа по модулю целых), рассмотрим дифференциальную форму $\alpha = dx \wedge dy$. Является ли эта форма точной?

Задача 4. Пусть $\omega \in \Lambda^n(V^*)$ — ненулевая дифференциальная форма с постоянными коэффициентами на вещественном векторном пространстве V. Докажите, что отображение $v \mapsto \iota_v\omega$ устанавливает изоморфизм между пространствами V и $\Lambda^{n-1}(V^*)$ (значок Λ^k обозначает k-ую внешенюю степень).

Задача 5. * Рассмотрим верхнюю полуплоскость $y > 0$ с симплектической формой

$$\omega = y\, dx \wedge dy.$$

Найдите гамильтоново векторное поле, соответствующее гамильтониану $H = e^x + y$.

Задача 6. * В пространстве $\mathbb{R}^4$ с координатами (x_1, x_2, x_3, x_4) задана постоянная 2-форма

$$\omega = 3\, dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3 + 5\, dx_3 \wedge dx_4.$$

Проверьте, что эта форма симплектическая. Найдите косоортогональное дополнение к плоскости $x_3 = x_4 = 0$ относительно формы ω.

Задача 7. Рассмотрим векторное поле на $\mathbb{R}^2$ с координатами $(x, -y + \sin x)$. Является ли это векторное поле гамильтоновым относительно симплектической структуры $\omega = dx \wedge dy$? Если да, то найдите гамильтониан.