Листок 1

Задачи, отмеченные звездочкой, нужно сдать письменно. Крайний срок сдачи всех задач (письменных и устных) — 19.09.

Задача 1. * Пусть A — точка на евклидовой плоскости, а точка $X(u)$ пробегает некоторую прямую l, причем параметр u является натуральным параметром на этой прямой (т.е. изменение параметра на любом отрезке прямой равно длине этого отрезка). Посчитайте производную по u расстояния между точками A и $X(u)$ (выразите ответ через угол между отрезком $AX(u)$ и прямой l).

Задача 2. Выведите из принципа Ферма, что при отражении относительно любой гладкой кривой на плоскости (находящейся в однородной и изотропной среде) угол падения равен углу отражения.

Задача 3. Все стены комнаты состоят из зеркал. Источник света помещен в одну точку комнаты. Можно ли подобрать форму комнаты и положение источника так, чтобы не все точки комнаты оказались освещенными?

Задача 4. * Рассмотрим изотропную среду, занимающую верхнюю полуплоскость $y > 0$, скорость света в которой выражается формулой $v(x, y) = y$. Найдите форму световых лучей в этой среде.

Задача 5. Рассмотрим изотропную среду, занимающую внутренность единичного круга, скорость света в которой выражается формулой $v(x, y) = 1-x^2-y^2$. Найдите форму световых лучей в этой среде.

Задача 6. * Плоскость заполнена однородной и изотропной средой. В плоскости расположено зеркало, форма которого совпадает с графиком функции f. Известно, что вертикальный поток световых лучей, падающих на зеркало сверху вниз, отражается таким образом, что отраженные лучи сходятся в некоторой точке (фокусе зеркала). Найдите все функции f, обладающие указанным свойством.

Задача 7. На плоскости имеется две различные однородные и изотропные среды. Граница раздела между средами имеет форму графика некоторой функции f. Известно, что вертикальный поток лучей, падающих сверху вниз, преломляется таким образом, что преломленные лучи собираются в одной точке. Перепишите это условие в виде дифференциального уравнения на функцию f. (Скорость света в верхней среде равна c_1, а скорость света в нижней среде равна c_2). Считая, что $f'(0) = 0$, найдите параболу, лучше всего приближающую график функции f вблизи точки 0.