Для получения максимальной оценки в 10 баллов достаточно полностью решить любые 5 задач. В случае решения бо́льшего количества задач дополнительные баллы также будут учтены.

На экзамене разрешается пользоваться любыми своими записями. Не разрешается общаться и пользоваться книгами, интернетом и т.п.

В решениях можно ссылаться на утверждения, доказанные в лекциях, и на сданные Вами задачи из листков.

Вариант 1

1. Найдите спектр оператора $T\colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, действующего по формуле

$$(Tx)_n = x_n + x_{n+2} \quad (x \in \ell^2(\mathbb{Z}),\ n \in \mathbb{Z}).$$

2. Компактен ли оператор

$$T\colon C[0,1] \to C[0,1], \quad (Tf)(x) = \int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{x-y}}\, dy?$$

Определение. Пусть T — ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве X. Его *спектром сюръективности* называется множество

$$\sigma_{\mathrm{su}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \mathbf{1}_X \text{ не сюръективен}\}.$$

3. Вычислите $\sigma_{\mathrm{su}}(T_\ell)$, где T_ℓ — левый сдвиг в ℓ^2.

4. Докажите, что $\sigma(T) \setminus \sigma_{\mathrm{su}}(T) \subseteq \operatorname{Int} \sigma(T)$ для любого T.

5. Пусть X, Y — банаховы пространства. Докажите, что ограниченный линейный оператор $T\colon X \to Y$ компактен тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ в X существует векторное подпространство X_ε конечной коразмерности, такое, что $\|T|_{X_\varepsilon}\| < \varepsilon$.

6. Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства. Ограниченный линейный оператор $T\colon H_1 \to H_2$ называется *полуфредгольмовым слева*, если его ядро конечномерно и образ замкнут. Докажите, что T полуфредгольмов слева тогда и только тогда, когда в H_1 не существует такой ортонормированной последовательности (e_n), что $Te_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Для получения максимальной оценки в 10 баллов достаточно полностью решить любые 5 задач. В случае решения бо́льшего количества задач дополнительные баллы также будут учтены.

На экзамене разрешается пользоваться любыми своими записями. Не разрешается общаться и пользоваться книгами, интернетом и т.п.

В решениях можно ссылаться на утверждения, доказанные в лекциях, и на сданные Вами задачи из листков.

Вариант 2

1. Найдите спектр оператора $T\colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, действующего по формуле

$$(Tx)_n = x_{n-2} + x_n + x_{n+2} \quad (x \in \ell^2(\mathbb{Z}),\ n \in \mathbb{Z}).$$

2. Компактен ли оператор

$$T\colon C[0,1] \to C[0,1], \quad (Tf)(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} \int\limits_0^x f(y)\,dy & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0? \end{cases}$$

Определение. Пусть T — ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве X. Его *аппроксимативным точечным спектром* называется множество

$$\sigma_{\mathrm{ap}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \mathbf{1}_X \text{ не топологически инъективен}\}.$$

3. Вычислите $\sigma_{\mathrm{ap}}(T_r)$, где T_r — правый сдвиг в ℓ^2.

4. Докажите, что $\sigma_{\mathrm{ap}}(T) \supseteq \partial\sigma(T)$ для любого T.

5. Пусть X, Y — банаховы пространства, $S, T \in \mathscr{B}(X, Y)$, причем T компактен. Предположим, что $\operatorname{Im} S \subseteq \operatorname{Im} T$. Докажите, что и S компактен.

Указание. Не забывайте про теорему о замкнутом графике.

6. Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства. Ограниченный линейный оператор $T\colon H_1 \to H_2$ называется *полуфредгольмовым слева*, если его ядро конечномерно и образ замкнут. Докажите, что T полуфредгольмов слева тогда и только тогда, когда существует такое $c > 0$, что множество $\{x \in H_1 : \|Tx\| \leqslant c\|x\|\}$ не содержит бесконечномерных векторных подпространств.