Вариант 1

Задачи 1–3 являются обязательными и необходимыми для получения максимальной оценки. Задача 4 — дополнительная и будет оцениваться отдельно; приступайте к ней, если останется время после решения первых трех задач.

На контрольной разрешается пользоваться любыми своими записями. Не разрешается общаться и пользоваться книгами, интернетом и т.п.

В решениях можно ссылаться на утверждения, доказанные в лекциях, и на сданные Вами задачи из листков.

1. Линейный оператор $T\colon C[-1,1]\to C[-1,1]$ задан формулой

$$(Tf)(x)=\int_{-1}^{1}(e^{(x+1)y}-1)f(y)\,dy.$$

1) Докажите, что T ограничен.
2) Вычислите $\|T\|$.
3) Достигает ли T нормы?

2. Пространство $BV[a,b]$ состоит из всех функций $f\colon [a,b]\to\mathbb{C}$, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{var}_{[a,b]}(f)=\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)-f(t_{i-1})| : a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b\right\}<\infty$$

(функции *ограниченной вариации*). Это пространство снабжается нормой $\|f\|=\|f\|_\infty+\operatorname{var}_{[a,b]}(f)$ (где $\|\cdot\|_\infty$ — sup-норма).

1) Эквивалентна ли исходная норма на $BV[a,b]$ норме $\|f\|'=|f(a)|+\operatorname{var}_{[a,b]}(f)$?
2) Докажите, что $BV[a,b]$ — банахово пространство.
3) Полно ли $BV[a,b]$ относительно нормы $\|\cdot\|_\infty$?

3. Докажите, что линейный оператор между нормированными пространствами, имеющий замкнутое ядро и конечномерный образ, ограничен.

4. Пусть G — компактная топологическая группа (т.е. группа, снабженная компактной топологией, относительно которой операция умножения и операция $g\mapsto g^{-1}$ непрерывны). Пусть $\pi\colon G\to \mathrm{GL}(X)$ — представление G в нормированном пространстве X, такое, что соответствующее действие $G\times X\to X$ непрерывно. Докажите, что на X есть норма, эквивалентная исходной, относительно которой все операторы $\pi(g)$ $(g\in G)$ изометричны.

Вариант 2

Задачи 1–3 являются обязательными и необходимыми для получения максимальной оценки. Задача 4 — дополнительная и будет оцениваться отдельно; приступайте к ней, если останется время после решения первых трех задач.

На контрольной разрешается пользоваться любыми своими записями. Не разрешается общаться и пользоваться книгами, интернетом и т.п.

В решениях можно ссылаться на утверждения, доказанные в лекциях, и на сданные Вами задачи из листков.

1. Линейный оператор $T\colon C[-1,1]\to C[-1,1]$ задан формулой

$$(Tf)(x)=\int_{-1}^{1}\sin(|x|y)f(y)\,dy.$$

1) Докажите, что T ограничен.
2) Вычислите $\|T\|$.
3) Достигает ли T нормы?

2. Пусть $0<\alpha\leqslant 1$. Пространство $\mathrm{Lip}_\alpha[a,b]$ состоит из всех функций $f\colon[a,b]\to\mathbb{C}$, удовлетворяющих условию

$$p_\alpha(f)=\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}<\infty$$

(*условие Липшица* с показателем α). Это пространство снабжается нормой $\|f\|=\|f\|_\infty+p_\alpha(f)$ (где $\|\cdot\|_\infty$ — sup-норма).

1) Эквивалентна ли исходная норма на $\mathrm{Lip}_\alpha[a,b]$ норме $\|f\|'=|f(a)|+p_\alpha(f)$?
2) Докажите, что $\mathrm{Lip}_\alpha[a,b]$ — банахово пространство.
3) Полно ли $\mathrm{Lip}_\alpha[a,b]$ относительно нормы $\|\cdot\|_\infty$?

3. Пусть X — нормированное пространство и $X_0\subset X$ — векторное подпространство. Предположим, что X_0 и X/X_0 сепарабельны. Докажите, что и X сепарабельно.

4. Пусть $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Зафиксируем $p\geqslant 2$ и обозначим через $\mathbb{K}^n_p$ пространство $\mathbb{K}^n$, снабженное нормой $\|x\|_p=(\sum_i|x_i|^p)^{1/p}$. Пусть $T\colon\mathbb{K}^n_p\to\mathbb{K}^n_2$ — изоморфизм векторных пространств. Докажите, что $\|T\|\|T^{-1}\|\geqslant n^{1/2-1/p}$. Выведите отсюда, что при $p,q\geqslant 2$, $p\neq q$, пространства $\mathbb{K}^n_p$ и $\mathbb{K}^n_q$ не являются изометрически изоморфными (если $n\neq 1$).