21.1. Опишите (задайте явными формулами) непрерывные исчисления для следующих операторов:
1) двусторонний сдвиг в $\ell^2(\mathbb{Z})$;
2-b) сдвиг в $L^2(\mathbb{T})$;
3-b) сдвиг в $L^2(\mathbb{R})$.

Определение 21.1. Пусть A — $*$-алгебра. Элемент $a \in A$ называется *положительным* (в этом случае пишут $a \geqslant 0$), если он самосопряжен и $\sigma_A(a) \subseteq [0, +\infty)$.

21.2 (*квадратный корень*)**.** Пусть H — гильбертово пространство и T — положительный оператор в H. Докажите, что существует единственный положительный оператор S в H такой, что $S^2 = T$. Этот оператор называется *квадратным корнем* из T и обозначается $\sqrt{T}$ или $T^{1/2}$.

21.3. Докажите, что следующие свойства оператора $T \in \mathscr{B}(H)$ эквивалентны:
1) $T \geqslant 0$;
2) $T = S^2$ для некоторого положительного $S \in \mathscr{B}(H)$;
3) $T = S^2$ для некоторого самосопряженного $S \in \mathscr{B}(H)$;
4) $T = S^* S$ для некоторого $S \in \mathscr{B}(H)$;
5) $\langle Tx, x \rangle \geqslant 0$ для всех $x \in H$.

Указание. Чтобы вывести (1) из (5), докажите, что $T + \lambda \mathbf{1}$ топологически инъективен при $\lambda > 0$.

Определение 21.2. Если $S, T \in \mathscr{B}(H)$ — самосопряженные операторы, то пишут $S \leqslant T$, если $T - S \geqslant 0$.

21.4 (*отношение порядка для проекторов*)**.** Пусть P_1, P_2 — ортогональные проекторы в H. Докажите эквивалентность следующих утверждений:
1) $P_1 \leqslant P_2$;
2) $\|P_1 x\| \leqslant \|P_2 x\|$ для всех $x \in H$;
3) $P_1 P_2 = P_1$;
4) $P_2 P_1 = P_1$;
5) $P_1 P_2 = P_2 P_1 = P_1$;
6) $P_2 - P_1$ — ортогональный проектор;
7) $\operatorname{Im} P_1 \subseteq \operatorname{Im} P_2$.

21.5 (*монотонность непрерывного исчисления*)**.** Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — самосопряженный оператор, f, g — непрерывные действительные функции на его спектре. Докажите, что если $f \leqslant g$, то и $f(T) \leqslant g(T)$.

21.6. Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства и $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$. Докажите, что
1) $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^* T = \operatorname{Ker} (T^* T)^{1/2}$; **2)** $\overline{\operatorname{Im} T} = \overline{\operatorname{Im} T T^*} = \overline{\operatorname{Im} (T T^*)^{1/2}}$.

21.7. Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства и $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$. Положим $S_1 = (T^* T)^{1/2}$ и $S_2 = (T T^*)^{1/2}$.
1) (*полярное разложение*). Докажите, что существует такая частичная изометрия (см. листок 18) $V \colon H_1 \to H_2$, что

$$T = V S_1 = S_2 V,$$
$$(\operatorname{Ker} V)^\perp = \overline{\operatorname{Im} S_1} = (\operatorname{Ker} S_1)^\perp = (\operatorname{Ker} T)^\perp,$$
$$\operatorname{Im} V = (\operatorname{Ker} S_2)^\perp = \overline{\operatorname{Im} S_2} = \overline{\operatorname{Im} T}.$$

2) (*единственность полярного разложения*). Пусть $T = W R_1$, где $W \colon H_1 \to H_2$ — частичная изометрия, $R_1 \in \mathscr{B}(H_1)$, $R_1 \geqslant 0$ и $(\operatorname{Ker} W)^\perp = \overline{\operatorname{Im} R_1}$. Докажите, что $W = V$ и $R_1 = S_1$.
3) (*единственность полярного разложения*). Пусть $T = R_2 W$, где $W \colon H_1 \to H_2$ — частичная изометрия, $R_2 \in \mathscr{B}(H_2)$, $R_2 \geqslant 0$ и $\operatorname{Im} W = (\operatorname{Ker} R_2)^\perp$. Докажите, что $W = V$ и $R_2 = S_2$.

21.8. Опишите полярные разложения следующих операторов:
1) диагональный оператор в ℓ^2;
2) оператор умножения на ограниченную измеримую функцию в $L^2(X, \mu)$;
3) оператор правого сдвига в ℓ^2;
4) оператор левого сдвига в ℓ^2.

21.9. Пусть H — гильбертово пространство, $T \in \mathscr{B}(H)$. Обязательно ли существуют *унитарный* оператор U и положительный оператор S такие, что $T = US$?

21.10-b. Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, $B(X)$ — алгебра ограниченных борелевских функций на X. Снабдим $B(X)$ слабо-мерной топологией (см. лекцию). Докажите следующие утверждения:
1) Последовательность в $B(X)$ сходится в слабо-мерной топологии тогда и только тогда когда она равномерно ограничена и сходится поточечно.
2) Умножение в $B(X)$ секвенциально непрерывно относительно слабо-мерной топологии.
3) Если X бесконечно, то умножение в $B(X)$ не является непрерывным относительно слабо-мерной топологии.

21.11-b. Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство. Снабдим алгебру $\mathscr{B}(H)$ слабой операторной топологией. Является ли умножение в $\mathscr{B}(H)$ **1)** непрерывным? **2)** секвенциально непрерывным?