20.1. Пусть e_n — числовая последовательность с единицей на n-м месте и нулем на остальных. Исследуйте последовательность (e_n) на слабую сходимость в пространствах c_0 и ℓ^p $(1 \leqslant p < \infty)$.

20.2. Докажите, что последовательность непрерывных функций на отрезке слабо сходится тогда и только тогда, когда она равномерно ограничена и сходится поточечно.

20.3. Пусть T_ℓ и T_r — операторы левого и правого сдвига в ℓ^2. Исследуйте последовательности (T_ℓ^n) и (T_r^n) на сходимость
1) по норме в $\mathscr{B}(\ell^2)$;
2) в сильной операторной топологии на $\mathscr{B}(\ell^2)$;
3) в слабой операторной топологии на $\mathscr{B}(\ell^2)$.

20.4-b. Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Для каждого $p \in (0,1)$ определим векторное пространство $L^p(X, \mu)$ так же, как и при $p \geqslant 1$. Для $f \in L^p(X, \mu)$ положим

$$|f|_p = \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x).$$

1) Докажите, что $\rho(f, g) = |f - g|_p$ — метрика на $L^p(X, \mu)$.
2) Докажите, что $L^p(X, \mu)$ локально выпукло лишь в том случае, когда оно конечномерно.
3) Докажите, что $L^p[0,1]^* = \{0\}$.

20.5-b. Пусть (X, μ) — пространство с конечной мерой. Обозначим через $L^0(X, \mu)$ пространство классов эквивалентности μ-измеримых функций на X (как обычно, функции эквивалентны, если они равны почти всюду). Для $f \in L^0(X, \mu)$ положим

$$|f|_0 = \int_X \frac{|f(x)|}{1 + |f(x)|} \, d\mu(x).$$

1) Докажите, что $\rho(f, g) = |f - g|_0$ — метрика на $L^0(X, \mu)$.
2) Докажите, что сходимость по метрике из п. 1 — это то же самое, что сходимость по мере.
3) Докажите, что $L^0(X, \mu)$ локально выпукло лишь в том случае, когда оно конечномерно.
4) Докажите, что $L^0[0,1]^* = \{0\}$.

20.6. Пусть $\langle X, Y \rangle$ — дуальная пара векторных пространств. Докажите, что
1) $\dim X < \infty \iff \dim Y < \infty \iff$ слабая топология $\sigma(X, Y)$ нормируема;
2-b) слабая топология $\sigma(X, Y)$ метризуема $\iff$ размерность Y не более чем счетна;
3-b) слабая топология на бесконечномерном нормированном пространстве и слабая* топология на пространстве, сопряженном к бесконечномерному банахову пространству, неметризуемы.

20.7. Докажите, что слабая топология на пространстве $\mathbb{K}^S$ (где S — множество) совпадает с исходной.

20.8. Пусть X и Y — нормированные пространства. Обозначим через SOT, WOT и NT соответственно сильную операторную топологию, слабую операторную топологию и топологию, задаваемую операторной нормой на $\mathscr{B}(X, Y)$.
1) Докажите, что WOT $\subseteq$ SOT $\subseteq$ NT.
2) Докажите, что если Y бесконечномерно, то WOT $\neq$ SOT.
3) Докажите, что если X бесконечномерно, то SOT $\neq$ NT.

20.9. Пусть X, Y — нормированные пространства. Докажите, что подмножество $M \subset \mathscr{B}(X, Y)$ равностепенно непрерывно тогда и только тогда, когда оно ограничено по операторной норме.

20.10. 1) Приведите пример линейного оператора между хаусдорфовыми ЛВП X и Y, непрерывного относительно слабых топологий на X и Y, но не непрерывного.
2) Приведите пример линейного оператора между хаусдорфовыми ЛВП, переводящего ограниченные множества в ограниченные, но не непрерывного.
3) Приведите пример линейного оператора между хаусдорфовыми ЛВП, переводящего ограниченные множества в ограниченные, но не непрерывного относительно слабых топологий на X и Y.

20.11. Докажите, что пространство c_0 секвенциально плотно в своем втором сопряженном относительно слабой* топологии.

20.12. Приведите пример банахова пространства X и векторного подпространства $Y \subset X^*$, которое замкнуто по норме, но не замкнуто в слабой* топологии.

20.13-b. Докажите, что в пространстве ℓ^1 всякая слабо сходящаяся последовательность сходится по норме.

20.14-b. Приведите пример ограниченного линейного оператора между банаховыми пространствами, который переводит слабо сходящиеся последовательности в последовательности, сходящиеся по норме, но тем не менее не является компактным.

Определение 20.1. Пусть X — локально выпуклое пространство, топология которого порождена семейством полунорм P. Для каждого $p \in P$ положим $X_p^0 = X/p^{-1}(0)$ и будем рассматривать X_p^0 как нормированное пространство относительно факторнормы полунормы p. Пополнения X_p нормированных пространств X_p^0 называются *ассоциированными* с X банаховыми пространствами.

20.15. Опишите банаховы пространства, ассоциированные со следующими ЛВП:
1) $\mathbb{K}^S$ (S — множество); **2)** $C(X)$ (X — топологическое пространство); **3)** $C^\infty[a,b]$; **4)** $C^\infty(\mathbb{R})$; **5)** $\mathscr{O}(U)$ (U — область в $\mathbb{C}$).

20.16. Для каждой ограниченной области $U \subset \mathbb{C}$ обозначим через $\mathscr{A}(\overline{U})$ подпространство в $C(\overline{U})$, состоящее их тех функций, которые голоморфны в U.
1) Положим $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Докажите, что при $r < R$ *оператор ограничения* $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}}_R) \to \mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}}_r)$, сопоставляющий каждой функции из $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}}_R)$ ее ограничение на $\overline{\mathbb{D}}_r$, разлагается в композицию $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}}_R) \xrightarrow{\varphi} \ell^1 \xrightarrow{M_\lambda} \ell^1 \xrightarrow{\psi} \mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}}_r)$, где φ, ψ — непрерывные операторы, а M_λ — компактный диагональный оператор. Выведите отсюда, что оператор ограничения компактен.
2) Докажите, что всякое ограниченное подмножество в пространстве $\mathscr{O}(\mathbb{D}_r)$ относительно компактно.
3-b) Пусть U, V — ограниченные области в $\mathbb{C}$, причем $\overline{V} \subset U$. Интерпретируйте оператор ограничения $\mathscr{A}(\overline{U}) \to \mathscr{A}(\overline{V})$ как некоторый интегральный оператор, и выведите отсюда, что он компактен.
4-b) (*теорема Монтеля*). Пусть U — область в $\mathbb{C}$. Докажите, что всякое ограниченное подмножество в пространстве $\mathscr{O}(U)$ относительно компактно.

20.17. Докажите, что всякое ограниченное подмножество в пространствах **1)** $C^\infty[a,b]$ и **2)** $C^\infty(\mathbb{R})$ относительно компактно.

Указание: используйте тот же прием, основанный на использовании ассоциированных банаховых пространств, что и в предыдущей задаче.