19.1. Пусть X, Y — топологические векторные пространства. Докажите, что
1) линейный оператор $T\colon X \to Y$ непрерывен $\iff$ он непрерывен в нуле;
2) множество $\mathscr{L}(X,Y)$ непрерывных линейных операторов из X в Y — векторное подпространство в $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X,Y)$.

19.2. Пусть (X,P) — полинормированное пространство. Докажите, что для каждого $x \in X$ все множества вида $U_{p_1,\ldots,p_n,\varepsilon}(x) = \{y \in X : p_i(y-x) < \varepsilon\ \forall i = 1,\ldots,n\}$ (где $p_1,\ldots,p_n \in P$ и $\varepsilon > 0$) образуют базу в x.

19.3. Докажите, что векторное пространство с топологией, порожденной семейством полунорм, является топологическим векторным пространством.

19.4. Докажите, что направленность (x_λ) в полинормированном пространстве (X,P) сходится к $x \in X$ тогда и только тогда, когда $p(x - x_\lambda) \to 0$ для всех $p \in P$.

19.5. Докажите, что топология на векторном пространстве X, порожденная семейством полунорм P, хаусдорфова тогда и только тогда, когда для каждого $0 \ne x \in X$ найдется такая полунорма $p \in P$, что $p(x) > 0$.

19.6. Для полунормы p на векторном пространстве X положим $U_p = \{x \in X : p(x) < 1\}$. Докажите, что **1)** $U_p \cap U_q = U_{\max\{p,q\}}$; **2)** $U_p \subseteq U_q \iff q \leqslant p$; **3)** $U_p \prec U_q \iff q \prec p$. (Здесь отношение $\prec$ для полунорм означает «мажорируется», а для множеств — «поглощается»; см. лекцию.)

19.7. Докажите, что семейство полунорм P на векторном пространстве X является направленным (относительно порядка $\prec$) тогда и только тогда, когда для каждого $x \in X$ (или, эквивалентно, для $x = 0$) множества вида $U_{p,\varepsilon}(x)$ (где $p \in P$, $\varepsilon > 0$) образуют базу в x.

19.8. Докажите, что **1)** выпуклая оболочка и **2)** закругленная оболочка открытого подмножества в топологическом векторном пространстве открыты.

19.9. Докажите, что хаусдорфова локально топология на векторном пространстве, порожденная семейством полунорм P, нормируема тогда и только тогда, когда P эквивалентно некоторому своему конечному подсемейству. (Если семейство P направленное, то последнее равносильно тому, что $P \sim \{p_0\}$ для некоторого $p_0 \in P$).

19.10. На каких из следующих топологических векторных пространств существует хотя бы одна непрерывная норма?
1) $\mathbb{K}^S$ (где S — множество);
2) $C(X)$ (где X — тихоновское[1] топологическое пространство);
3) пространство голоморфных функций $\mathscr{O}(U)$ на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{C}$;
4) $C^\infty[a,b]$;
5) $C^\infty(U)$, где $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество;
6) нормированное пространство, снабженное слабой топологией;
7) сопряженное к нормированному пространству, снабженное слабой* топологией;
8) $\mathscr{B}(X,Y)$ с сильной операторной топологией (где X и Y — нормированные пространства);
9) $\mathscr{B}(X,Y)$ со слабой операторной топологией (где X и Y — нормированные пространства).

19.11. Какие пространства из предыдущей задачи нормируемы?

[1]Хаусдорфово топологическое пространство X называется *тихоновским*, если для каждого замкнутого множества $F \subset X$ и каждого $x \in X \setminus F$ найдется такая непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$, что $f|_F = 0$ и $f(x) = 1$. Тихоновскими являются все метризуемые пространства (докажите!), все хаусдорфовы компакты и, более общим образом, все *нормальные* пространства (см. любой учебник по общей топологии).

19.12. 1) Докажите, что на конечномерном векторном пространстве любые два семейства полунорм, каждое из которых задает хаусдорфову топологию, эквивалентны.
2-b) Докажите, что на конечномерном векторном пространстве есть только одна топология, превращающая его в хаусдорфово топологическое векторное пространство.

19.13. Пусть S — множество.
1) Докажите, что для любой функции $f \in \mathbb{K}^S$ оператор умножения $M_f \colon \mathbb{K}^S \to \mathbb{K}^S$, $M_f(g) = fg$, непрерывен.
2) Опишите все непрерывные линейные функционалы на пространстве $\mathbb{K}^S$.

19.14. 1) Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Докажите, что любой линейный дифференциальный оператор $\sum_{|\alpha| \leqslant N} a_\alpha D^\alpha$ в пространстве $C^\infty(U)$ (где $a_\alpha \in C^\infty(U)$) непрерывен.
2) Докажите аналогичное утверждение для пространства $\mathscr{O}(U)$, где $U \subseteq \mathbb{C}$ (см. п.3 задачи 19.10).

19.15. Пусть $\mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ — пространство голоморфных функций в круге $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Для $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ положим $c_n(f) = f^{(n)}(0)/n!$. Докажите, что компактно-открытая топология на $\mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ порождается любым из следующих эквивалентных семейств полунорм:

1) $\|f\|_r = \sum_{n=0}^\infty |c_n(f)| r^n \quad (0 < r < R)$;

2) $\|f\|_{r,p} = \Big(\sum_{n=0}^\infty (|c_n(f)| r^n)^p\Big)^{1/p} \quad (0 < r < R,\ p \in [1, +\infty)$ фиксировано);

3) $\|f\|_{r,\infty} = \sup_{n \geqslant 0} |c_n(f)| r^n \quad (0 < r < R)$;

4) $\|f\|_r^I = \int_{|z|=r} |f(z)|\, d\mu(z) \quad (0 < r < R)$;

5) $\|f\|_{r,p}^I = \Big(\int_{|z|=r} |f(z)|^p\, d\mu(z)\Big)^{1/p} \quad (0 < r < R,\ p \in [1, +\infty)$ фиксировано).

В пп. 4 и 5 μ — мера Лебега на окружности $|z| = r$.

19.16. Пусть $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество. Докажите, что компактно-открытая топология на $\mathscr{O}(U)$ совпадает с топологией, унаследованной из $C^\infty(U)$.

19.17. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $C_c^\infty(U)$ — пространство гладких функций с компактным носителем в U, снабженное стандартной индуктивной топологией (см. лекцию). Докажите, что последовательность (f_n) сходится к функции f в $C_c^\infty(U)$ тогда и только тогда, когда существует такой компакт $K \subset U$, что $\operatorname{supp} f_n \subseteq K$ для всех n, и $f_n \to f$ равномерно на K со всеми частными производными.

19.18. Пространство *быстро убывающих последовательностей* $s(\mathbb{Z})$ определяется так:

$$s(\mathbb{Z}) = \Big\{ x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} : \|x\|_k = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n| |n|^k < \infty \ \forall k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \Big\}.$$

Топология на $s(\mathbb{Z})$ порождается последовательностью полунорм $\{\| \cdot \|_k : k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$. Постройте топологический изоморфизм $C^\infty(\mathbb{T}) \cong s(\mathbb{Z})$.

19.19-b. Докажите, что хаусдорфова локально топология на векторном пространстве, порожденная семейством полунорм P, метризуема тогда и только тогда, когда P эквивалентно некоторому своему не более чем счетному подсемейству.

Указание. Если $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность полунорм, то функция

$$\rho(x, y) = \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x - y)}{1 + p_n(x - y)}$$

удовлетворяет неравенству треугольника.

19.20-b. Какие пространства из задач 19.10 и 19.17 метризуемы?