18.1. Для каждого из следующих операторов T найдите их (гильбертово) сопряженные:
1) диагональный оператор в ℓ^2;
2) оператор умножения на ограниченную измеримую функцию в $L^2(X,\mu)$;
3) операторы левого и правого сдвига в ℓ^2;
4) оператор двустороннего сдвига в $\ell^2(\mathbb{Z})$;
5) интегральный оператор Гильберта–Шмидта в $L^2(X,\mu)$ (см. задачу 2.7);
6) оператор T в $L^2[0,1]$, действующий по формуле

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

18.2. Какие из операторов предыдущей задачи самосопряженные? унитарные? нормальные? являются ортогональными проекторами?

18.3. Докажите, что
1) каждый непустой компакт $K \subset \mathbb{C}$ является спектром некоторого нормального оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве;
2) каждый непустой компакт $K \subset \mathbb{R}$ является спектром некоторого самосопряженного оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве;
3) каждый непустой компакт $K \subseteq \mathbb{T}$ является спектром некоторого унитарного оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве.

18.4-b. Что можно сказать про спектр изометрии в гильбертовом пространстве?

18.5. Вычислите норму оператора из п. 6 задачи 18.1.
Указание: оператор T^*T компактен и самосопряжен.

18.6. Докажите, что следующие свойства оператора V в гильбертовом пространстве H эквивалентны:
(i) $VV^*V = V$;
(ii) V^*V — проектор;
(iii) ограничение V на $(\operatorname{Ker} V)^\perp$ — изометрия.
Оператор V с такими свойствами называется *частичной изометрией.*

18.7. Пусть V — частичная изометрия в гильбертовом пространстве H.
1) Докажите, что V^* — частичная изометрия.
2) Положим $H_0 = (\operatorname{Ker} V)^\perp$ и $H_1 = \operatorname{Im} V$. Докажите, что операторы $V|_{H_0}\colon H_0 \to H_1$ и $V^*|_{H_1}\colon H_1 \to H_0$ — обратные друг другу изометрические изоморфизмы, V^*V — ортогональный проектор на H_0, а VV^* — ортогональный проектор на H_1. Эти проекторы называются, соответственно, *начальным* и *конечным* проекторами частичной изометрии V.

18.8. **1)** Докажите, что оператор $T \in \mathscr{B}(H)$ нормален тогда и только тогда, когда $\|Tx\| = \|T^*x\|$ для всех $x \in H$.
2) Докажите, что если оператор $T \in \mathscr{B}(H)$ нормален, то $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*$ и $H = \operatorname{Ker} T \oplus \overline{\operatorname{Im} T}$ (ортогональная прямая сумма).

18.9. Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор, $x \in H$ и $Tx = \lambda x$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Докажите, что $T^*x = \bar{\lambda} x$.

18.10. Докажите, что собственные векторы нормального оператора, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны.

18.11. Пусть T — нормальный оператор в гильбертовом пространстве H (или нормальный элемент любой C^*-алгебры). Докажите, что $r(T) = \|T\|$.

Указание: оператор T^*T самосопряжен.

18.12. Докажите, что остаточный спектр нормального оператора пуст.

18.13. Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор и $H_0 \subseteq H$ — замкнутое T-инвариантное подпространство. Обязательно ли $H_0^\perp$ T-инвариантно?

18.14. Обобщите теорему Гильберта-Шмидта на случай компактных нормальных операторов.

18.15-b. Введем инволюцию на $C^n[a,b]$ формулой $f^*(t) = \overline{f(t)}$. Докажите, что $C^n[a,b]$ — инволютивная банахова алгебра, но не C^*-алгебра при $n \geqslant 1$.

18.16-b. Введем инволюцию на дисковой алгебре $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$ формулой $f^*(z) = \overline{f(\bar z)}$. Докажите, что $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$ — инволютивная банахова алгебра, но не C^*-алгебра.

18.17-b. 1) Докажите, что спектр любого самосопряженного элемента унитальной C^*-алгебры A содержится в $\mathbb{R}$.

2) Верно ли это, если A — инволютивная банахова алгебра?

Указание. **1)** Для всех $\lambda \in \sigma(a)$ и всех $t > 0$ справедливо неравенство $|\lambda \pm it|^2 \leqslant \|a\|^2 + t^2$.

18.18-b. Пусть A — унитальная C^*-алгебра, $B \subseteq A$ — замкнутая $*$-подалгебра, причем $1_A \in B$. Докажите, что B спектрально инвариантна в A.

Указание. Возьмите самосопряженный элемент $a \in B$, обратимый в A, рассмотрите $a + it1$ при $t \in \mathbb{R}$ и воспользуйтесь предыдущей задачей.

18.19. Найдите все λ, при которых на отрезке $[0, \pi]$ имеет нетривиальное решение задача Штурма–Лиувилля

1) $-u'' = \lambda u, \quad u(0) = u(\pi) = 0;$
2) $-u'' = \lambda u, \quad u'(0) = u'(\pi) = 0.$

Найдите соответствующие решения.

18.20. Из предыдущей задачи выведите тотальность тригонометрической системы в $L^2[-\pi, \pi]$.

18.21. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $K \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$ и T_K — интегральный оператор Гильберта–Шмидта в пространстве $L^2(X, \mu)$ (компактный в силу задачи 15.8). Представим оператор T_K в виде

$$T_K f = \sum_n \lambda_n \langle f, e_n \rangle f_n, \tag{1}$$

где (e_n) и (f_n) — ортонормированные системы в $L^2(X, \mu)$; такое разложение всегда возможно в силу теоремы Шмидта. Докажите, что $\sum_n |\lambda_n|^2 < \infty$.

18.22. Пусть X — метризуемый компакт, μ — регулярная борелевская мера на X, и пусть $K \in C(X \times X)$. Представим оператор Гильберта–Шмидта T_K в виде (1), где $\lambda_n \neq 0$ для всех n. Докажите, что

1) $f_n \in C(X)$ для всех n;

2) ряд (1) сходится равномерно и абсолютно для каждой $f \in L^2(X, \mu)$;

3) $g = \sum_n \langle g, f_n \rangle f_n$ для любой $g \in \operatorname{Im} T_K$, причем этот ряд сходится равномерно и абсолютно.

Указание. **1)** Воспользуйтесь задачей 15.9. **2)** Сначала убедитесь, что $\sup\limits_x \sum\limits_n |\lambda_n f_n(x)|^2 < \infty$.

18.23-b. Выведите из задач 18.19–18.22 равномерную и абсолютную сходимость рядов Фурье достаточно гладких периодических функций на прямой.