17.1. Для каждого из следующих операторов T **1)** найдите $\sigma_{\mathrm{ess}}(T)$; **2)** вычислите $\mathrm{ind}(T-\lambda\mathbf{1})$ для всевозможных $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(T)$:

(a) диагональный оператор в ℓ^p или в c_0;
(b) оператор умножения на непрерывную функцию в $C[a,b]$;
(c) оператор умножения на ограниченную измеримую функцию в $L^p(X,\mu)$;
(d) оператор левого сдвига в ℓ^p или в c_0;
(e) оператор правого сдвига в ℓ^p или в c_0;
(f) оператор двустороннего сдвига в $\ell^p(\mathbb{Z})$ или в $c_0(\mathbb{Z})$;
(g) произвольный компактный оператор.

17.2. Пусть $f \in C(\mathbb{T})$, и пусть T_f — соответствующий оператор Тёплица в пространстве Харди $H^2(\mathbb{T})$.
1) Предположим, что $f(z) = 0$ для некоторого $z \in \mathbb{T}$. Докажите, что T_f не фредгольмов.
2) Найдите $\sigma_{\mathrm{ess}}(T_f)$ в терминах f.
3-b) Найдите $\|T_f\|$ в терминах f.

17.3. Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство. Докажите, что для каждого $n \in \mathbb{Z}$ в H существует фредгольмов оператор индекса n.

17.4 (*четвертое доказательство аддитивности индекса*)**.** Пусть X, Y, Z — банаховы пространства и $T\colon X \to Y$, $S\colon Y \to Z$ — фредгольмовы операторы. Рассмотрите оператор

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_Y & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_Y \cos t & -\mathbf{1}_Y \sin t \\ \mathbf{1}_Y \sin t & \mathbf{1}_Y \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_Y \end{pmatrix},$$

действующий из $X \oplus Y$ в $Y \oplus Z$, и, пользуясь непрерывностью индекса, получите еще одно доказательство формулы $\mathrm{ind}(ST) = \mathrm{ind}\, S + \mathrm{ind}\, T$.

Теорема 1. *Группа* $\mathrm{GL}(H)$ *ограниченных обратимых операторов в гильбертовом пространстве* H *линейно связна.*

Доказать эту теорему мы сможем через некоторое время[1]. В оставшейся части листка разрешается ею пользоваться.

17.5. Пусть H — гильбертово пространство. Докажите, что фредгольмовы операторы $S, T \in \mathscr{B}(H)$ лежат в одной компоненте связности множества $\mathscr{F}red(H)$ $\iff$ их можно соединить непрерывным путем в $\mathscr{F}red(H)$ $\iff$ $\mathrm{ind}\, S = \mathrm{ind}\, T$.

17.6. Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство и $\mathcal{Q}(H) = \mathscr{B}(H)/\mathscr{K}(H)$ — алгебра Калкина. Обозначим через G группу обратимых элементов в $\mathcal{Q}(H)$, а через $G_0 \subset G$ — связную компоненту единицы. Докажите, что фредгольмов индекс индуцирует изоморфизм групп $G/G_0 \cong \mathbb{Z}$.

17.7. Пусть X, Y — нормированные пространства. Докажите, что отображение

$$Y \otimes X^* \to \mathscr{F}(X,Y), \quad x \otimes f \mapsto f(\,\cdot\,)x \tag{1}$$

— изоморфизм векторных пространств.

[1] На самом деле верно гораздо более сильное утверждение: если H бесконечномерно, то группа $\mathrm{GL}(H)$ стягиваема, т.е. гомотопически эквивалентна точке (теорема Кюйпера). Это уже гораздо более сложное утверждение, и мы его доказывать не будем. См. добавление к книге М. Атья «Лекции по K-теории», М.: Мир, 1967.

Определение 17.1. Пусть X — нормированное пространство. Функционал $\mathrm{Tr}\colon \mathscr{F}(X) \to \mathbb{C}$ строится как композиция отображения $\mathscr{F}(X) \to X \otimes X^*$, обратного к (1), и спаривания

$$X \otimes X^* \to \mathbb{C}, \quad x \otimes f \mapsto f(x).$$

Этот функционал называется *следом.*

17.8. 1) Покажите, что при $\dim X < \infty$ определение 17.1 эквивалентно обычному определению следа.
2) Докажите, что для $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ и $S \in \mathscr{F}(Y,X)$ справедлива формула $\mathrm{Tr}(ST) = \mathrm{Tr}(TS)$.

17.9 (*абстрактная формула Атья–Ботта*)**.** Пусть X, Y — банаховы пространства и $T\colon X \to Y$ — фредгольмов оператор. Выберем ограниченный оператор $S\colon Y \to X$ так, чтобы операторы $\mathbf{1}_X - ST$ и $\mathbf{1}_Y - TS$ были конечномерными. Докажите, что

$$\operatorname{ind} T = \mathrm{Tr}(\mathbf{1}_X - ST) - \mathrm{Tr}(\mathbf{1}_Y - TS).$$

В частности, если $X = Y$, то $\operatorname{ind} T = \mathrm{Tr}([T,S])$.

17.10 (*пятое доказательство аддитивности индекса*)**.** Придумайте доказательство формулы $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T$, основанное на результате предыдущей задачи.