16.1. Что можно сказать об операторе, который компактен и фредгольмов одновременно?

16.2. Пусть $a_0, \ldots, a_n \in C[a,b]$. Докажите, что оператор

$$D\colon C^n[a,b] \to C[a,b], \quad D(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y$$

фредгольмов, и вычислите его индекс.

16.3. Докажите, что оператор

$$D\colon C^1(S^1) \to C(S^1), \quad D(f) = f'$$

фредгольмов, и вычислите его индекс.

16.4. Пусть $\lambda \in \ell^\infty$, и пусть M_λ — соответствующий диагональный оператор в ℓ^p или в c_0. Найдите условие на λ, необходимое и достаточное для фредгольмовости M_λ. Вычислите его индекс.

16.5. Пусть $f \in C[a,b]$, и пусть M_f — оператор умножения на f в $C[a,b]$. Найдите условие на f, необходимое и достаточное для фредгольмовости M_f. Вычислите его индекс.

16.6. Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — промежуток, $f\colon I \to \mathbb{C}$ — существенно ограниченная измеримая функция, и пусть M_f — оператор умножения на f в $L^p(I)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Найдите условие на f, необходимое и достаточное для для фредгольмовости M_f. Вычислите его индекс.

16.7-b. Сделайте то же, что в предыдущей задаче, для оператора умножения в пространстве $L^p(X,\mu)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, где (X,μ) — пространство с мерой.

16.8-b (*второе доказательство аддитивности индекса*)**.** Пусть X, Y, Z — векторные пространства, $T\colon X \to Y$ и $S\colon Y \to Z$ — фредгольмовы операторы. Постройте разложения $X = X_0 \oplus X_1$, $Y = Y_0 \oplus Y_1$ и $Z = Z_0 \oplus Z_1$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) X_0, Y_0 и Z_0 конечномерны;
2) $T(X_i) \subset Y_i$ и $S(Y_i) \subset Z_i$ $(i = 0, 1)$;
3) T — изоморфизм X_1 на Y_1, а S — изоморфизм Y_1 на Z_1.

Из существования таких разложений выведите, что формулу $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T$ достаточно доказать для операторов между конечномерными пространствами. Докажите эту формулу.

16.9-b (*третье доказательство аддитивности индекса*)**. 1)** Пусть X, Y — векторные пространства, $X_1 \subset X$ и $Y_1 \subset Y$ — векторные подпространства и $T\colon X \to Y$ — линейный оператор, осуществляющий изоморфизм между X_1 и Y_1. Определим линейный оператор $\widehat{T}\colon X/X_1 \to Y/Y_1$ формулой $\widehat{T}(x + X_1) = T(x) + Y_1$. Постройте изоморфизмы $\operatorname{Ker} T \cong \operatorname{Ker} \widehat{T}$ и $\operatorname{Coker} T \cong \operatorname{Coker} \widehat{T}$. Выведите отсюда, что T фредгольмов $\iff$ $\widehat{T}$ фредгольмов, и $\operatorname{ind} T = \operatorname{ind} \widehat{T}$.
2) Пусть X, Y, Z — векторные пространства, $T\colon X \to Y$ и $S\colon Y \to Z$ — фредгольмовы операторы. Постройте подпространства конечной коразмерности $X_1 \subset X$, $Y_1 \subset Y$ и $Z_1 \subset Z$ так, чтобы T осуществлял изоморфизм X_1 на Y_1, а S — изоморфизм Y_1 на Z_1. Из существования таких подпространств и из п.1 выведите, что формулу $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T$ достаточно доказать для операторов между конечномерными пространствами. Докажите эту формулу.

16.10 (*классические теоремы Фредгольма*)**.** Пусть $I = [a,b]$, $K \in C(I \times I)$ и $f \in C(I)$. Рассмотрим следующие уравнения в $C(I)$:

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x), \tag{1}$$

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy = 0, \tag{2}$$

$$\psi(x) - \int_a^b K(y,x)\psi(y)\,dy = 0. \tag{3}$$

Докажите следующие утверждения:

I. Уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда для любого решения ψ уравнения (3) выполнено условие $\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx = 0$.

II. Если уравнение (2) имеет лишь тривиальное решение, то уравнение (1) имеет единственное решение для любой $f \in C(I)$. Если же уравнение (2) имеет нетривиальное решение, то уравнение (1) разрешимо не для всех $f \in C(I)$.

III. Уравнения (2) и (3) имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений.

Указание. С помощью теоремы Рисса–Шаудера докажите аналоги утверждений I–III в пространстве $L^2(I)$, а затем докажите, что если функции f и K непрерывны и $\varphi \in L^2(I)$ — решение уравнения (1), то φ непрерывна.