15.1. Компактны ли операторы правого и левого сдвига в ℓ^p и c_0?

15.2. Может ли образ компактного оператора между банаховыми пространствами содержать бесконечномерное замкнутое подпространство?

15.3. Пусть $f \in C[a,b]$, и пусть M_f — оператор умножения на f в $C[a,b]$. Найдите условие на f, необходимое и достаточное для компактности M_f.

15.4. Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — промежуток, $f\colon I \to \mathbb{C}$ — существенно ограниченная измеримая функция, и пусть M_f — оператор умножения на f в $L^p(I)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Найдите условие на f, необходимое и достаточное для для компактности M_f.

15.5-b. Сделайте то же, что в предыдущей задаче, для оператора умножения в пространстве $L^p(X,\mu)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, где (X,μ) — пространство с мерой.

15.6. Для интегрируемой функции f на $[0,1]$ определим функцию Tf формулой

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Является ли T компактным оператором
1) из $C[0,1]$ в $C[0,1]$?
2) из $L^p[0,1]$ в $C[0,1]$ (где $1 < p \leqslant \infty$)?
3) из $L^p[0,1]$ в $L^p[0,1]$ (где $1 < p \leqslant \infty$)?
4) из $L^1[0,1]$ в $C[0,1]$?
5-b) из $L^1[0,1]$ в $L^1[0,1]$?

15.7. Пусть $I = [a,b]$, и пусть $K \in C(I \times I)$. Докажите компактность *интегрального оператора* $T\colon C(I) \to C(I)$,

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)\,dy.$$

15.8. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, и пусть $K \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$. Докажите компактность *интегрального оператора Гильберта–Шмидта* $T\colon L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$,

$$(Tf)(x) = \int_X K(x,y)f(y)\,d\mu(y).$$

Указание: докажите, что линейная оболочка множества функций вида $K(x,y) = f(x)g(y)$, где $f,g \in L^2(X,\mu)$, плотна в $L^2(X \times X, \mu \times \mu)$, и воспользуйтесь тем, что $\|T\| \leqslant \|K\|_2$ (см. задачу 2.7).

15.9. Пусть X — метризуемый компакт, μ — регулярная борелевская мера на X и $K \in C(X \times X)$. Докажите, что образ интегрального оператора Гильберта–Шмидта $T_K\colon L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$ содержится в $C(X)$, и что T_K является компактным оператором из $L^2(X,\mu)$ в $C(X)$.

15.10. Пусть X — банахово пространство и $1 \leqslant p < \infty$. Докажите, что всякий компактный оператор $T\colon X \to \ell^p$ аппроксимируется конечномерными операторами.

15.11. Пусть X — банахово пространство, $x \in X$ и $f \in X^*$. Определим оператор $x \otimes f \in \mathscr{B}(X)$ формулой $(x \otimes f)(y) = f(y)x$. Найдите явную формулу для операторов **1)** $T(x \otimes f)$; **2)** $(x \otimes f)T$ (где $T \in \mathscr{B}(X)$); **3)** $(x_1 \otimes f_1)(x_2 \otimes f_2)$.

15.12. Пусть X — банахово пространство и $0 \neq I \subseteq \mathscr{B}(X)$ — двусторонний идеал. Докажите, что $I \supseteq \mathscr{F}(X)$. Как следствие, всякий ненулевой замкнутый двусторонний идеал в $\mathscr{B}(H)$ (где H — гильбертово пространство) содержит $\mathscr{K}(H)$. (*Анонс:* через некоторое время мы сможем доказать, что $\mathscr{K}(H)$ — единственный замкнутый двусторонний идеал в $\mathscr{B}(H)$, отличный от 0 и $\mathscr{B}(H)$).