11.1. Для каждой из следующих алгебр A дайте критерий обратимости ее элемента и найдите спектр каждого ее элемента: **1)** $A = \mathbb{C}[t]$; **2)** $A = \mathbb{C}[[t]]$; **3)** $A = \mathbb{C}(t)$.

11.2. 1) Придумайте пример линейного оператора в каком-нибудь векторном пространстве, спектр которого строго больше, чем множество его собственных значений.
2) Докажите, что такой оператор есть в любом бесконечномерном векторном пространстве.

11.3. Пусть X — нормированное пространство, $L(X)$ — алгебра всех линейных операторов в X. Обязательно ли подалгебра ограниченных операторов $\mathscr{B}(X) \subset L(X)$ спектрально инвариантна в $L(X)$?

11.4. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $f\colon X \to \mathbb{C}$ — измеримая функция.
1) Приведите пример, показывающий, что значение f не обязано быть ее существенным значением.
2) Приведите пример, показывающий, что существенное значение f не обязано быть ее значением.
3) Докажите, что если $X = [a, b]$ — отрезок с мерой Лебега, а f непрерывна, то множество ее значений совпадает с множеством ее существенных значений.

11.5. Пусть A — унитальная алгебра, $a \in A$ — ее элемент и $L_a\colon A \to A,\ b \mapsto ab$ — оператор умножения. Докажите, что $\sigma(a) = \sigma(L_a)$.

11.6. 1) Пусть A — унитальная алгебра и элемент $a \in A$ обратим слева и справа (т.е. существуют такие $a_\ell, a_r \in A$, что $a_\ell a = a a_r = 1$). Докажите, что a обратим.
2) Приведите пример алгебры и ее элемента, который обратим слева (или справа), но не обратим. (См., однако, задачу 11.9-b.)

11.7. Пусть A — унитальная алгебра.
1) Пусть $a_1, \ldots, a_n \in A$ — коммутирующие элементы. Докажите, что элемент $a_1 \cdots a_n$ обратим тогда и только тогда, когда все элементы $a_1, \ldots, a_n$ обратимы.
2) Покажите, что для некоммутирующих $a_1, \ldots, a_n$ утверждение из п.1 перестает быть верным. (См., однако, задачу 11.9-b.)

11.8. 1) Пусть $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$ и $|b| < 1$. Положим $c = (1 - ab)^{-1} = \sum_n (ab)^n$. Выразите элемент $(1 - ba)^{-1}$ через a, b и c, не пользуясь коммутативностью умножения в $\mathbb{C}$.
2) Пусть A — унитальная алгебра, $a, b \in A$. Докажите, что элемент $1 - ab$ обратим тогда и только тогда, когда элемент $1 - ba$ обратим.

11.9. Пусть A — унитальная алгебра, $a, b \in A$.
1) Докажите, что $\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}$.
2) Докажите, что если a или b обратим, то $\sigma(ab) = \sigma(ba)$.
3) Приведите пример, показывающий, что в общем случае $\sigma(ab) \neq \sigma(ba)$. (См., однако, задачу 11.9-b.)

11.9-b. Пусть A — конечномерная алгебра.
1) Докажите, что всякий элемент A, обратимый слева (или справа), обратим.
2) Пусть $a_1, \ldots, a_n \in A$. Докажите, что элемент $a_1 \cdots a_n$ обратим тогда и только тогда, когда все элементы $a_1, \ldots, a_n$ обратимы.
3) Докажите, что $\sigma(ab) = \sigma(ba)$ для любых $a, b \in A$.

11.10-b. Докажите, что утверждения предыдущей задачи сохраняют силу для нётеровых алгебр.

11.11. Пусть A — ненулевая унитальная алгебра, $a \in A$ — нильпотентный элемент. Докажите, что $\sigma(a) = \{0\}$.