Все задачи этого листка относятся к материалу модуля 2 и будут приниматься в модуле 3 в качестве бонусных.

10.0-b. Докажите, что инъективное банахово пространство (см. листок 6) дополняемо в любом содержащем его банаховом пространстве.

10.1-b. 1) Докажите, что c_0 недополняемо в ℓ^∞.
2) Приведите пример неинъективного банахова пространства.
Указание. Можно действовать следующим образом:
a) Докажите, что $\mathbb{N}$ можно представить в виде несчетного объединения $\mathbb{N} = \bigcup_{i \in I} A_i$ счетных множеств A_i так, что $A_i \cap A_j$ конечно при $i \neq j$. (Подсказка: вместо $\mathbb{N}$ удобнее брать $\mathbb{Q}$).
b) Докажите, что для каждого $f \in (\ell^\infty)^*$, обращающегося в нуль на c_0, множество тех $i \in I$, для которых $f(\chi_{A_i}) \neq 0$, не более чем счетно.
c) Докажите, что на ℓ^∞/c_0 не существует счетного множества непрерывных линейных функционалов, разделяющего точки.
d) Докажите, что c_0 недополняемо в ℓ^∞.

10.2-b. 1) Докажите, что если банахово пространство X топологически изоморфно Y^* для некоторого банахова пространства Y, то оно дополняемо в X^{**}.
2) Решите задачу 5.9-b с помощью п. 1 и задачи 10.1-b.

10.3-b. Пусть X и Y — банаховы пространства и $S \in \mathscr{B}(Y^*, X^*)$. Обязательно ли существует такой $T \in \mathscr{B}(X, Y)$, что $S = T^*$?

10.4-b. Отождествим $(\ell^1)^*$ с ℓ^∞ (см. задачу 7.1) и рассмотрим пространство c_0 как подмножество в $(\ell^1)^*$. Найдите ${}^\perp c_0$ и $({}^\perp c_0)^\perp$.

10.5-b. Пусть X — нерефлексивное банахово пространство. Покажите, что в X^* существует замкнутое векторное подпространство N, для которого $N \neq ({}^\perp N)^\perp$.

10.6-b. Придумайте пример инъективного оператора $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ между банаховыми пространствами X и Y, такого, что $\operatorname{Im} T^*$ не плотен в X^*. (*Указание:* X обязано быть нерефлексивным — см. лекцию.)

10.7-b. Пусть X, Y — нормированные пространства и $T \in \mathscr{B}(X, Y)$.
1) Докажите, что $T = \varkappa\sigma$, где $\varkappa$ — инъективный, а σ — открытый оператор.
2) Докажите, что $T = \mu\tau$, где μ — топологически инъективный оператор с замкнутым образом, а τ — оператор с плотным образом.
3) Сформулируйте и докажите утверждения о единственности разложений из пп. 1 и 2.

Определение 10.1. Оператор $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ называется *строгим*, если он осуществляет открытое отображение X на $\operatorname{Im} T$ и $\operatorname{Im} T$ замкнут в Y.

10.8-b. Докажите, что если X и Y — банаховы пространства, то оператор T осуществляет открытое отображение X на $\operatorname{Im} T$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im} T$ замкнут в Y.

Разложение оператора. Пусть X, Y — нормированные пространства и $T \in \mathscr{B}(X, Y)$. Положим $\operatorname{Coim} T = X / \operatorname{Ker} T$ (*кообраз* T). Из свойств факторпространств (см. лекцию) следует существование коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "Q"'] & Y \\ \operatorname{Coim} T \arrow[r, "\widetilde{T}"] & \overline{\operatorname{Im} T} \arrow[u, "J"'] \end{tikzcd} \tag{1}$$

в которой Q — факторотображение и J — тождественное вложение.

10.9-b. Докажите, что следующие свойства оператора $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ эквивалентны:

(1) T строгий;
(2) для любого разложения из п. 1 задачи 10.7-b оператор $\varkappa$ топологически инъективен и имеет замкнутый образ;
(3) для любого разложения из п. 2 задачи 10.7-b оператор τ открыт;
(4) оператор $\widetilde{T}$ из разложения (1) — топологический изоморфизм.

10.10-b (*«усиленная лемма Серра»*)**.** Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $S \in \mathscr{B}(X,Y)$, $T \in \mathscr{B}(Y,Z)$ и $TS = 0$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

(1) последовательность $X \xrightarrow{S} Y \xrightarrow{T} Z$ точна и $\operatorname{Im} T$ замкнут;
(2) последовательность $X^* \xleftarrow{S^*} Y^* \xleftarrow{T^*} Z^*$ точна и $\operatorname{Im} S^*$ замкнут.

Как следствие, цепной комплекс банаховых пространств точен тогда и только тогда, когда точен его сопряженный комплекс.

10.11-b (*«лемма Серра»*)**.** Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $S \in \mathscr{B}(X,Y)$, $T \in \mathscr{B}(Y,Z)$ и $TS = 0$. Предположим, что операторы S и T имеют замкнутые образы. Постройте изометрический изоморфизм $(\operatorname{Ker} T / \operatorname{Im} S)^* \cong \operatorname{Ker} S^* / \operatorname{Im} T^*$.

Как следствие, если C — цепной комплекс банаховых пространств со строгими дифференциалами, то $H^n(C^*) \cong H_n(C)^*$.