9.1. Пусть X — нормированное пространство, $i_X\colon X \to X^{**}$ — каноническое вложение. Докажите, что для любого оператора $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} X^{**} \arrow[r, "T^{**}"] & Y^{**} \\ X \arrow[u, "i_X"] \arrow[r, "T"] & Y \arrow[u, "i_Y"'] \end{tikzcd}$$

9.2. Докажите, что

1) композиция канонического вложения $c_0 \to (c_0)^{**}$ и стандартного изоморфизма $(c_0)^{**} \cong \ell^\infty$ — это тождественное вложение c_0 в ℓ^∞;

2) композиция канонического вложения $\ell^1 \to (\ell^1)^{**}$ и стандартного изоморфизма $(\ell^1)^{**} \cong (\ell^\infty)^* \cong M(2^{\mathbb{N}})$ — это вложение ℓ^1 в $M(2^{\mathbb{N}})$, сопоставляющее каждой последовательности $x \in \ell^1$ меру μ_x, заданную формулой $\mu_x(A) = \sum_{n\in A} x_n$.

9.3. Докажите, что

1) гильбертово пространство рефлексивно;

2) пространства $L^p(X,\mu)$ $(1 < p < +\infty)$ рефлексивны;

3) пространство c_0 нерефлексивно;

4) пространство ℓ^1 нерефлексивно;

5) пространство $L^1(X,\mu)$ нерефлексивно (за исключением случая, когда оно конечномерно);

6) пространство $C[a,b]$ нерефлексивно.

9.4. Пусть X — нормированное пространство, $i_X\colon X \to X^{**}$ — каноническое вложение. Исследуйте взаимосвязь между операторами $i_{X^*}\colon X^* \to X^{***}$ и $i_X^*\colon X^{***} \to X^*$.

9.5. 1) Докажите, что банахово пространство X рефлексивно $\iff$ X^* рефлексивно.
2) Выведите отсюда нерефлексивность ℓ^1, ℓ^∞, $L^\infty[a,b]$ и $M[a,b]$.

9.6. Докажите, что размерность бесконечномерного банахова пространства несчетна.

9.7. Приведите пример бочки в нормированном пространстве, не содержащей окрестности нуля.

9.8. Приведите пример нормированного пространства X и последовательности функционалов (f_n) в X^*, ограниченной на каждом векторе, но не ограниченной по норме.

9.9. Пусть X, Y, Z — нормированные пространства, причем X либо Y полно.
1) Докажите, что любой раздельно непрерывный билинейный оператор $X\times Y \to Z$ непрерывен. (*Указание:* воспользуйтесь теоремой Банаха–Штейнгауза).
2) Верно ли утверждение из п. 1 без предположения о полноте?

9.10-b. Пусть G — компактная топологическая группа и π — ее представление в банаховом пространстве X, непрерывное в том смысле, что отображение $G\times X \to X$, $(g,x) \mapsto \pi(g)x$, непрерывно. Докажите, что на X существует эквивалентная норма, относительно которой все операторы $\pi(g)$ изометричны. (*Указание:* проще всего воспользоваться теоремой Банаха–Штейнгауза. Впрочем, можно сделать эту задачу и «в лоб», не пользуясь полнотой X — см. контрольную за 1 модуль.)

9.11. 1) Выведите теорему об открытом отображении из теоремы об обратном операторе.
2) Выведите теорему об обратном операторе из теоремы о замкнутом графике.

9.12. Приведите пример банахова пространства X, нормированного пространства Y и биективного оператора $T \in \mathscr{B}(X,Y)$, обратный к которому не является непрерывным.

9.13-b. Приведите пример нормированного пространства X, банахова пространства Y и биективного оператора $T \in \mathscr{B}(X,Y)$, обратный к которому не является непрерывным.

9.14-b. Приведите пример абсолютно выпуклого поглощающего множества в банаховом пространстве, не содержащего окрестности нуля.