8.1. Пусть μ — комплексная мера на алгебре $\mathscr{A}$ подмножеств множества X.
1) Докажите, что ее вариация $|\mu|$ также является мерой.
2) Докажите, что если μ σ-аддитивна, то и $|\mu|$ σ-аддитивна.

8.2. Пусть μ — комплексная мера на алгебре $\mathscr{A}$ подмножеств множества X. Назовем подалгебру $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ *плотной* относительно μ, если для каждого $A \in \mathscr{A}$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $B \in \mathscr{B}$, что $|\mu|(A \triangle B) < \varepsilon$. Докажите, что если $\mathscr{B}$ плотна в $\mathscr{A}$ относительно μ, то для любого $B \in \mathscr{B}$ справедливо равенство $|\mu|(B) = \big|\mu|_{\mathscr{B}}\big|(B)$.

8.3. Восполните детали в доказательстве теоремы Хильдебрандта–Канторовича об изометрическом изоморфизме между $M(\mathscr{A})$ и $B_{\mathscr{A}}(X)^*$ (см. лекцию).

8.4. 1) Докажите, что каждая функция из $C^1[a,b]$ имеет ограниченную вариацию.
2) Приведите пример непрерывной функции на $[a,b]$ неограниченной вариации.
3) Приведите пример дифференцируемой функции на $[a,b]$ неограниченной вариации.

8.5. Пусть φ — кусочно постоянная функция на $[a,b]$. Как устроена соответствующая ей мера Лебега–Стилтьеса?

8.6. Пусть φ — функция ограниченной вариации на $[a,b]$, непрерывная справа на (a,b) и такая, что $\varphi(a) = 0$. Пусть μ_φ — соответствующая ей мера Лебега–Стилтьеса. Вычислите (в терминах функции φ) значения μ_φ на всевозможных интервалах, полуинтервалах, отрезках и одноточечных множествах.

8.7. Докажите σ-аддитивность меры Лебега–Стилтьеса на алгебре подмножеств отрезка $[a,b]$, порожденной отрезками $[a,t]$ $(a < t \leqslant b)$.

8.8. Для каждого из следующих функционалов f на пространстве $C[-1,1]$ опишите соответствующую меру $\mu \in M[-1,1]$ и функцию ограниченной вариации $\varphi \in BV_0[-1,1]$. Вычислите вариацию $V_{-1}^1(\varphi)$ и убедитесь, что она равна $\|f\|$.
1) $f(x) = x(-1)$; **2)** $f(x) = x(-1/2) + 2x(0) + 3x(1/2)$; **3)** $f(x) = x(-1/2) - x(1/2)$;
4) $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} tx(t)\,dt$; **5)** $f(x) = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x(t)\,dt$; **6)** $f(x) = x(-1) - 2\int\limits_{-1}^{1} x(t)\,dt + 3x(0)$.

8.9. Пусть (X,μ) — пространство с мерой. Зафиксируем $f \in L^1(X,\mu)$ и обозначим через ν_f комплексную меру с плотностью f относительно μ. Докажите, что $\|\nu_f\| = \|f\|_1$.

8.10. Для каждых $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ и $\mu \in M[a,b]$ обозначим через $F_{\lambda,\mu}$ линейный функционал на пространстве $C^n[a,b]$, заданный формулой

$$F_{\lambda,\mu}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^{(k)}(a) + \int_a^b f^{(n)}\,d\mu.$$

Докажите, что $(\lambda,\mu) \mapsto F_{\lambda,\mu}$ — топологический изоморфизм между $\mathbb{K}^n \oplus M[a,b]$ и $C^n[a,b]^*$.

8.11-b (*представляющие меры*)**.** Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — компакт и $\mathscr{A}(K)$ — подалгебра в $C(K)$, состоящая из функций, голоморфных во внутренности K и непрерывных на K.
1) Пусть $z_0 \in K$. Докажите, что существует вероятностная борелевская мера μ на ∂K, такая, что для каждой функции $f \in A$ справедлива формула $f(z_0) = \int_{\partial K} f\,d\mu$.
2) (*мера Пуассона*). Найдите меру μ из п. 1 в явном виде для случая, когда $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ — замкнутый единичный круг. (*Указание*: в этом случае μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на окружности; найдите явную формулу для ее плотности.)
3) Докажите, что для круга K мера Пуассона из п. 2 — это единственная вероятностная борелевская мера, удовлетворяющая условиям п. 1. (*Указание*: можно воспользоваться теоремой Вейерштрасса, согласно которой любая непрерывная функция f на $[-\pi,\pi]$, удовлетворяющая условию $f(-\pi) = f(\pi)$, равномерно аппроксимируется тригонометрическими многочленами.)