А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 27

27.1. Аннуляторы и поляры

Продолжим начатое на прошлой лекции обсуждение двойственности. Следующее понятие уже встречалось нам в контексте нормированных пространств.

Определение 27.1. Пусть $\langle X, Y\rangle$ — дуальная пара. *Аннулятором* подмножества $M \subseteq X$ относительно двойственности $\langle X, Y\rangle$ называется множество

$$M^{\perp}_{\langle X,Y\rangle} = \{y \in Y : \langle x, y\rangle = 0 \ \forall x \in M\}.$$

В тех случаях, когда ясно, о какой дуальной паре идет речь, мы будем вместо $M^{\perp}_{\langle X,Y\rangle}$ писать просто $M^{\perp}$.

Заметим, что аннулятор $M^{\perp}$ в смысле определения 13.1 — это в точности аннулятор $M^{\perp}_{\langle X,X^*\rangle}$. Понятие преданнулятора из определения 13.1 также сводится к определению 27.1:

Определение 27.2. Пусть X — хаусдорфово локально выпуклое пространство. *Преданнулятором* подмножества $N \subseteq X^*$ называется его аннулятор ${}^{\perp}N = N^{\perp}_{\langle X^*,X\rangle}$ относительно двойственности $\langle X^*, X\rangle$. Иначе говоря,

$${}^{\perp}N = \{x \in X : f(x) = 0 \ \forall f \in N\}.$$

Следующее понятие тесно связано с понятием аннулятора и, как мы вскоре увидим, обобщает его.

Определение 27.3. Пусть $\langle X, Y\rangle$ — дуальная пара. *Полярой* подмножества $M \subseteq X$ относительно двойственности $\langle X, Y\rangle$ называется множество

$$M^{\circ}_{\langle X,Y\rangle} = \{y \in Y : \mathrm{Re}\langle x, y\rangle \leqslant 1 \ \forall x \in M\}.$$

В тех случаях, когда ясно, о какой дуальной паре идет речь, мы будем вместо $M^{\circ}_{\langle X,Y\rangle}$ писать просто M°.

Соглашение 27.1. В дальнейшем нам неоднократно понадобится рассматривать замыкания подмножества M локально выпуклого пространства X относительно топологий, отличающихся от исходной (например, относительно слабой топологии $\sigma(X, X^*)$). В этой связи договоримся о следующих обозначениях. Символ $\overline{M}$ всегда по умолчанию будет означать замыкание множества M относительно исходной топологии пространства X; если же τ — какая-либо другая топология на X, то замыкание M относительно топологии τ будет обозначаться через $\overline{M}^{\tau}$.

Перечислим простейшие свойства поляр, вытекающие непосредственно из определения.

Предложение 27.1. *Пусть $\langle X, Y\rangle$ — дуальная пара. Справедливы следующие утверждения:*

(i) $M_1 \subseteq M_2 \subseteq X \Longrightarrow M_2^\circ \subseteq M_1^\circ \subseteq Y$;

(ii) *если $M \subseteq X$ закруглено, то*

$$M^\circ = \{y \in Y : |\langle x, y\rangle| \leqslant 1 \ \forall x \in M\}; \tag{27.1}$$

(iii) *если $M \subseteq X$ — векторное подпространство, то $M^\circ = M^\perp$;*

(iv) *поляра M° любого множества $M \subseteq X$ выпукла и $\sigma(Y, X)$-замкнута;*

(v) *если $M \subseteq X$, то $M^\circ = \left(\overline{\mathrm{conv}(M)}^{\sigma(X,Y)}\right)^\circ$.*

(vi) *если X — хаусдорфово локально выпуклое пространство, $Y = X^*$ и $M \subseteq X$, то $M^\circ = \left(\overline{\mathrm{conv}(M)}\right)^\circ$.*

Замечание 27.2. Иногда равенство (27.1) принимают в качестве *определения* поляры любого (не обязательно закругленного) множества $M \subseteq X$. Больших проблем эти отличия в терминологии обычно не вызывают, т.к. в большинстве ситуаций приходится иметь дело с полярами лишь закругленных множеств.

Замечание 27.3. Заметим, что из п. (ii) следует, в частности, что полярой замкнутого единичного шара в нормированном пространстве X относительно двойственности $\langle X, X^*\rangle$ является замкнутый единичный шар в X^*.

Определение 27.4. Пусть $\langle X, Y\rangle$ — дуальная пара. *Биполярой* подмножества $M \subseteq X$ называется множество

$$M^{\circ\circ} = \left(M^\circ_{\langle X,Y\rangle}\right)^\circ_{\langle Y,X\rangle} \subseteq X.$$

Ясно, что всегда $M \subseteq M^{\circ\circ}$. Более того, отсюда и из предложения 27.1 (iv) немедленно следует, что

$$\overline{\mathrm{conv}(M)}^{\sigma(X,Y)} \subseteq M^{\circ\circ}.$$

Фундаментальный результат теории двойственности, который мы сейчас докажем, утверждает, что на самом деле последнее включение является равенством.

Теорема 27.2 (о биполяре для дуальных пар)**.** *Пусть $\langle X, Y\rangle$ — дуальная пара. Для любого подмножества $M \subseteq X$ справедливо равенство*

$$M^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{conv}(M)}^{\sigma(X,Y)}.$$

Теорема 27.2, как мы увидим ниже, является частным случаем следующего утверждения.

Теорема 27.3 (о биполяре для локально выпуклых пространств)**.** *Пусть X — хаусдорфово локально выпуклое пространство. Для любого подмножества $M \subseteq X$ справедливо равенство*

$$M^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{conv}(M)},$$

где биполяра берется относительно двойственности $\langle X, X^*\rangle$, а замыкание берется в исходной топологии пространства X.

Доказательство. С учетом предложения 27.1 (vi) мы можем заменить M на $\overline{\mathrm{conv}(M)}$ и считать с самого начала, что M выпукло и замкнуто. Таким образом, нам следует доказать включение $M^{\circ\circ} \subseteq M$. Зафиксируем произвольный элемент $x_0 \in X \setminus M$. В силу теоремы об отделении выпуклых множеств (см. теорему 9.13 (iii) и обсуждение после следствия 25.10), существует такой непрерывный $\mathbb{R}$-линейный функционал g на X, что $g(x) \leqslant 1$ для всех $x \in M$, но $g(x_0) > 1$. Если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то $g = \mathrm{Re}\, f$ для некоторого (единственного) $f \in X^*$ (см. лемму 9.2); если же $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то мы полагаем $f = g$. Неравенство $\mathrm{Re}\, f(x) \leqslant 1$, справедливое для всех $x \in M$, означает, что $f \in M^\circ$, откуда $M^{\circ\circ} \subseteq \{f\}^\circ$. С другой стороны, неравенство $\mathrm{Re}\, f(x_0) > 1$ означает, что $x_0 \notin \{f\}^\circ$. Объединяя два последних наблюдения, заключаем, что $x_0 \notin M^{\circ\circ}$. Это завершает доказательство. □

Доказательство теоремы 27.2. Достаточно применить теорему 27.3 к пространству $(X, \sigma(X, Y))$. □

Следствие 27.4. *Если X — хаусдорфово локально выпуклое пространство и $M \subseteq X$ — выпуклое подмножество, то замыкание M совпадает с его слабым замыканием. В частности, M замкнуто тогда и только тогда, когда оно слабо замкнуто.*

Доказательство. В силу теоремы 27.3, как замыкание M, так и его слабое замыкание совпадают с его биполярой. □

Замечание 27.4. Разумеется, условие выпуклости M в следствии 27.4 существенно. Если бы замкнутость любого подмножества в X была равносильна его слабой замкнутости, то слабая топология на X совпадала бы с исходной, а это в большинстве случаев не так (см. наблюдение 26.3).

Замечание 27.5. Хотя слабая топология на локально выпуклом пространстве X в большинстве интересных случаев строго слабее исходной, все же в некоторых ситуациях эти две топологии ведут себя так, как если бы они совпадали. Напомним, в частности, что линейный функционал на X непрерывен тогда и только тогда, когда он слабо непрерывен (следствие 26.6 (i)), а подмножество в X ограничено тогда и только тогда, когда оно слабо ограничено (предложение 26.11). Теперь же мы видим, что выпуклое подмножество в X замкнуто тогда и только тогда, когда оно слабо замкнуто.

Следующее утверждение уточняет то, что мы уже знаем для нормированных пространств (см. предложение 13.4 и следствие 13.5).

Следствие 27.5. *Пусть X — хаусдорфово локально выпуклое пространство, $M \subseteq X$ и $N \subseteq X^*$ — произвольные подмножества. Справедливы следующие утверждения:*

(i) ${}^\perp(M^\perp) = \overline{\mathrm{span}(M)} = \overline{\mathrm{span}(M)}^{\mathrm{wk}}$;

(ii) $({}^\perp N)^\perp = \overline{\mathrm{span}(N)}^{\mathrm{wk}^*}$;

(iii) *если X — нормированное пространство, то*

$$({}^\perp N)^\perp = \overline{\mathrm{span}(N)}^{\mathrm{wk}^*} \supseteq \overline{\mathrm{span}(N)}^{\mathrm{wk}} = \overline{\mathrm{span}(N)}; \tag{27.2}$$

(iv) *если X — рефлексивное банахово пространство, то все множества в* (27.2) *совпадают.*

Доказательство. (i) Следует из теоремы 27.3 и следствия 27.4, примененных к множеству $\operatorname{span}(M)$.

(ii) Следует из теоремы 27.2, примененной к дуальной паре $\langle X^*, X\rangle$ и множеству $\operatorname{span}(N)$.

(iii) Следует из (ii), следствия 26.7 и следствия 27.4.

(iv) Следует из (iii) и следствия 26.7. □

Обратимся теперь к линейным операторам между локально выпуклыми пространствами. Следующие два утверждения усиливают предложение 13.8 и следствие 13.9 соответственно.

Следствие 27.6. *Пусть X, Y — хаусдорфовы локально выпуклые пространства и $T\colon X \to Y$ — непрерывный линейный оператор. Справедливы следующие соотношения:*

(i) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$;
(ii) $\overline{\operatorname{Im} T} = \overline{\operatorname{Im} T}^{\mathrm{wk}} = {}^\perp(\operatorname{Ker} T^*)$;
(iii) $\operatorname{Ker} T = {}^\perp(\operatorname{Im} T^*)$;
(iv) $\overline{\operatorname{Im} T^*}^{\mathrm{wk}^*} = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

Доказательство. Утверждение (i) доказывается точно так же, как и для нормированных пространств (см. предложение 13.8). Утверждение (ii) вытекает из (i) и следствия 27.5. Наконец, утверждения (iii) и (iv) получаются, если применить (i) и (ii) к оператору $T^*\colon (Y^*, \mathrm{wk}^*) \to (X^*, \mathrm{wk}^*)$. □

Следствие 27.7. *Пусть X, Y — хаусдорфовы локально выпуклые пространства и $T\colon X \to Y$ — непрерывный линейный оператор. Тогда*

(i) T^* *инъективен* $\iff$ $\operatorname{Im} T$ *плотен в* Y $\iff$ $\operatorname{Im} T$ *слабо плотен в* Y;
(ii) T *инъективен* $\iff$ $\operatorname{Im} T^*$ *слабо** *плотен в* Y.

Наконец, имеет место следующее уточнение теоремы 13.13.

Теорема 27.8. *Пусть X, Y — банаховы пространства, $T\colon X \to Y$ — ограниченный линейный оператор. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\operatorname{Im} T$ *замкнут;*
(ii) $\operatorname{Im} T$ *слабо замкнут;*
(iii) $\operatorname{Im} T^*$ *замкнут;*
(iv) $\operatorname{Im} T^*$ *слабо** *замкнут.*

Если эти условия выполнены, то

$$\operatorname{Im} T = {}^\perp(\operatorname{Ker} T^*), \quad \operatorname{Im} T^* = (\operatorname{Ker} T)^\perp, \tag{27.3}$$

и существуют изометрические изоморфизмы

$$\operatorname{Ker} T^* \cong (\operatorname{Coker} T)^*, \quad \operatorname{Coker} T^* \cong (\operatorname{Ker} T)^*. \tag{27.4}$$

Доказательство. Эквивалентность (i) и (ii) — это тривиальный частный случай следствия 27.4. Из теоремы 13.13 мы знаем, что (i) $\iff$ (iii), и что выполнение этих условий влечет за собой (27.3) и (27.4). С другой стороны, второе из равенств (27.3) влечет (iv), а оставшаяся импликация (iv) $\Longrightarrow$ (iii) очевидна. □

Предостережение 27.6. В связи с теоремой 27.8 подчеркнем еще раз, что замкнутое подпространство в сопряженном к банахову пространству вовсе не обязано быть слабо* замкнутым. Для эквивалентности утверждений (iii) и (iv) существенно, что речь там идет именно об образе сопряженного оператора.

Следующий результат является непосредственным следствием, а с исторической точки зрения — предтечей теоремы о биполяре.

Теорема 27.9 (Голдстайн). *Для любого нормированного пространства X канонический образ его замкнутого единичного шара слабо* плотен в замкнутом единичном шаре пространства X^{**}.*

Доказательство. Пусть $M = i_X(\mathbb{B}_{1,X}) \subset X^{**}$. Для дуальной пары $\langle X^{**}, X^* \rangle$ имеем $M^\circ = \mathbb{B}_{1,X^*}$ и, следовательно, $M^{\circ\circ} = \mathbb{B}_{1,X^{**}}$ (см. замечание 27.3). Остается применить теорему 27.2, согласно которой $M^{\circ\circ} = \overline{M}^{\mathrm{wk}^*}$. □

Следствие 27.10. *Пусть X — нормированное пространство и $i_X \colon X \to X^{**}$ — каноническое вложение. Тогда*

(i) $i_X \colon (X, \mathrm{wk}) \to (X^{**}, \mathrm{wk}^*)$ *— топологические инъективный оператор, и*
(ii) $\operatorname{Im} i_X$ *слабо* плотен в X^{**}.*

Доказательство. Утверждение (i) следует непосредственно из определения слабой топологии на X и слабой* топологии на X^{**}, а утверждение (ii) вытекает из теоремы 27.9. □

Замечание 27.7. Вместо теоремы 27.9 для доказательства утверждения (ii) можно применить следствие 27.5 к подпространству $\operatorname{Im} i_X \subseteq X^{**}$.

27.2. Равностепенная непрерывность. Теорема Банаха–Алаоглу–Бурбаки

Определение 27.5. Пусть X и Y — топологические векторные пространства. Множество $M \subseteq \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ называется *равностепенно непрерывным*, если для каждой окрестности нуля $V \subseteq Y$ найдется такая окрестность нуля $U \subseteq X$, что $\varphi(V) \subseteq U$ для каждого $\varphi \in M$.

Разумеется, если множество M равностепенно непрерывно, то каждый оператор из M непрерывен (см. предложение 24.1). Также легко видеть, что всякое конечное подмножество в $\mathscr{L}(X, Y)$ равностепенно непрерывно.

Наблюдение 27.11. Если X и Y — нормированные пространства, то множество $M \subseteq \mathscr{L}(X, Y)$ равностепенно непрерывно тогда и только тогда, когда оно ограничено по операторной норме (докажите!).

Замечание 27.8. Мы уже встречались с понятием равностепенной непрерывности «под другим соусом», а именно, в контексте отображений между метрическими пространствами (см. определение 18.3). Формально ни определение 27.5 не является частным случаем определения 18.3, ни наоборот. Однако оба эти определения являются частными случаями общего понятия равностепенно непрерывного семейства отображений между *равномерными* пространствами. Мы не будем приводить здесь определение равномерного пространства, поскольку для наших целей такая общность не требуется. Говоря нестрого, равномерное пространство — это множество X, снабженное некоторой дополнительной структурой (так называемой *равномерностью*), которая порождает топологию на X, и благодаря наличию которой имеет смысл «сравнивать» между собой окрестности разных точек. В частности, каждое метрическое пространство и каждая топологическая абелева группа обладают естественными равномерными структурами. Вышеупомянутая возможность «сравнивать» окрестности разных точек для этих двух примеров сводится к следующему: чтобы сравнить шары в метрическом пространстве с разными центрами, достаточно сравнить их радиусы, а чтобы сравнить окрестности U и V разных точек x и y в топологической абелевой группе, надо сначала совместить эти точки посредством сдвига на $x-y$, а затем сравнить окрестности U и $V+(x-y)$ точки x. Для равномерных пространств имеют смысл такие понятия, как равномерно непрерывное отображение, равностепенно непрерывное семейство отображений, полнота, пополнение... С теорией равномерных пространств можно познакомиться, например, по книге Р. Энгелькинга «Общая топология» (М.: Мир, 1986).

Предложение 27.12. *Пусть X — топологическое векторное пространство. Рассмотрим следующие свойства множества $M \subseteq X^*$:*

(i) *M равностепенно непрерывно;*
(ii) *M слабо* ограничено.*

Тогда (i) $\Longrightarrow$ (ii). *Если же X — банахово пространство, то свойства* (i) *и* (ii) *эквивалентны.*

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Слабая* ограниченность множества M означает в точности, что $\sup_{f\in M}|f(x)|<\infty$ для каждого $x\in X$. Пользуясь равностепенной непрерывностью M, найдем такую окрестность нуля $U\subseteq X$, что $|f(x)|<1$ для всех $f\in M$ и всех $x\in U$. Если теперь $x\in X$ произволен, то из непрерывности умножения на скаляр следует, что $\lambda x\in U$ для некоторого $\lambda>0$. Следовательно, $|f(x)|<\lambda^{-1}$ для всех $f\in M$, что и доказывает слабую* ограниченность M.

Импликация (ii) $\Longrightarrow$ (i) для банахова пространства X вытекает из теоремы Банаха–Штейнгауза (см. следствие 11.7) и наблюдения 27.11. □

Следующий результат существенно усиливает импликацию (i) $\Longrightarrow$ (ii) из предыдущего предложения.

Теорема 27.13 (Банах, Алаоглу, Бурбаки)**.** *Пусть X — топологическое векторное пространство. Всякое равностепенно непрерывное множество $M\subseteq X^*$ относительно компактно в слабой* топологии.*

Доказательство. Заметим, что слабая* топология на X^* является ограничением на X^* тихоновской топологии на пространстве $\mathbb{K}^X$. Пусть $M\subseteq X^*$ — равностепенно непрерывное множество, и пусть K — его замыкание в $\mathbb{K}^X$. Нам достаточно показать, что K компактно и содержится в X^*. В силу предложения 27.12, для каждого $x\in X$ множество $M_x=\{f(x) : f\in M\}$ ограничено в $\mathbb{K}$. Отсюда и из теоремы Тихонова следует, что произведение $\prod_{x\in X}\overline{M}_x$ компактно. Поскольку K — замкнутое подмножество в $\prod_{x\in X}\overline{M}_x$, мы заключаем, что K также компактно.

Покажем теперь, что $K \subseteq X^*$. Пусть $f \in K$ и (f_λ) — направленность в M, сходящаяся к f в тихоновской топологии, т.е. поточечно. Легко видеть, что f — линейный функционал. Для доказательства его непрерывности зафиксируем $\varepsilon > 0$ и, пользуясь равностепенной непрерывностью M, подберем такую окрестность нуля $U \subseteq X$, что $|f_\lambda(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in U$ и всех λ. Переходя к пределу по λ, получаем, что $|f(x)| \leqslant \varepsilon$ для всех $x \in U$. Следовательно, f непрерывен в нуле, а значит, непрерывен. Таким образом, K — компактное подмножество в X^*, что и требовалось доказать. □

Следствие 27.14. *Если X — нормированное пространство, то замкнутый единичный шар $\mathbb{B}_{1,X^*}$ в его сопряженном пространстве слабо* компактен.*

Для сепарабельных пространств теорему 27.13 можно уточнить.

Теорема 27.15. *Пусть X — сепарабельное топологическое векторное пространство. Всякое равностепенно непрерывное множество $M \subseteq X^*$ относительно компактно и метризуемо в слабой* топологии.*

Доказательство (набросок). Пусть $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ — плотное множество в X и (f_λ) — направленность в M. Из равностепенной непрерывности M следует (убедитесь), что

$$f_\lambda \xrightarrow{\mathrm{wk}^*} f \iff f_\lambda(x_n) \to f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{27.5}$$

Пусть теперь τ — топология на X^*, порожденная семейством полунорм $\{\|\cdot\|_n : n \in \mathbb{N}\}$, где $\|f\|_n = |f(x_n)|$. В силу задачи 19 листка 19, топология τ метризуема. С другой стороны, из (27.5) вытекает, что ограничения на M топологии τ и слабой* топологии совпадают. Следовательно, M метризуемо. Остальное следует из теоремы 27.13. □

Следствие 27.16. *Если X — сепарабельное нормированное пространство, то замкнутый единичный шар $\mathbb{B}_{1,X^*}$ в его сопряженном пространстве компактен и метризуем в слабой* топологии.*

Предостережение 27.9. Следует иметь в виду, что если X — бесконечномерное банахово пространство, то X^* неметризуемо в слабой* топологии (несмотря на то, что его единичный шар является таковым при условии сепарабельности X); см. задачу 20 из листка 19).

Следствие 27.17. *Банахово пространство X рефлексивно тогда и только тогда, когда его замкнутый единичный шар $\mathbb{B}_{1,X}$ слабо компактен.*

Доказательство. Если X рефлексивно, то каноническое вложение i_X устанавливает гомеоморфизм между шаром $\mathbb{B}_{1,X}$, снабженным слабой топологией, и шаром $\mathbb{B}_{1,X^{**}}$, снабженным слабой* топологией; последний же компактен в силу следствия 27.14. Обратная импликация следует из теоремы Голдстайна 27.9. □

Замечание 27.10. Первоначальная версия теоремы Банаха–Алаоглу–Бурбаки была доказана Банахом в 1929 г. и представляла собой утверждение, эквивалентное нашему следствию 27.16. Фактически Банах доказал *секвенциальную* компактность шара $\mathbb{B}_{1,X^*}$ в слабой* топологии (в предположении метризуемости X) — в то время понятие компактного топологического пространства, введенное Александровым и Урысоном пятью годами ранее, еще не являлось общепринятым. Современная версия теоремы Банаха–Алаоглу–Бурбаки была получена независимо Алаоглу, Бурбаки, Шмульяном и Какутани в конце 1930-х гг.

27.3. Слабые топологии и компактные операторы

Установим теперь некоторые факты о компактных операторах, основанные на использовании слабых топологий.

Предложение 27.18. *Пусть X и Y — банаховы пространства, причем X рефлексивно. Тогда для любого компактного линейного оператора $T\colon X \to Y$ множество $T(\mathbb{B}_{1,X})$ компактно.*

Доказательство. Согласно определению 18.4, множество $T(\mathbb{B}_{1,X})$ относительно компактно в Y. Остается доказать его замкнутость. Поскольку пространство X рефлексивно, шар $\mathbb{B}_{1,X}$ слабо компактен в X (см. следствие 27.17). Отсюда и из непрерывности T в слабых топологиях (следствие 26.10) вытекает, что множество $T(\mathbb{B}_{1,X})$ слабо компактно в Y, а следовательно, слабо замкнуто и тем более замкнуто в Y. □

Теорема 27.19. *Пусть X и Y — банаховы пространства. Рассмотрим следующие свойства ограниченного линейного оператора $T\colon X \to Y$:*

(i) *T компактен;*
(ii) *$T\colon (X, \mathrm{wk}) \to (Y, \|\cdot\|)$ секвенциально непрерывен (т.е. для любой последовательности (x_n) в X, слабо сходящейся к элементу $x \in X$, последовательность (Tx_n) сходится к Tx по норме).*

Тогда (i) $\Longrightarrow$ (ii)*; если же X рефлексивно, то свойства* (i) *и* (ii) *эквивалентны.*

Доказательство. При доказательстве импликации (i) $\Longrightarrow$ (ii) мы можем считать, что $x = 0$. Из слабой сходимости последовательности (x_n) следует ее ограниченность (следствие 11.8), откуда с учетом компактности оператора T вытекает, что последовательность (Tx_n) относительно компактна в Y. Для доказательства ее сходимости к 0 достаточно доказать, что 0 — ее единственная предельная точка. Пусть y — какая-либо предельная точка этой последовательности, и пусть возрастающая последовательность (n_k) натуральных чисел такова, что $Tx_{n_k} \to y$ при $k \to \infty$. Поскольку $x_{n_k} \xrightarrow{\mathrm{wk}} 0$, а T непрерывен в слабых топологиях (следствие 26.10), имеем $Tx_{n_k} \xrightarrow{\mathrm{wk}} 0$, откуда $y = 0$, как и требовалось.

Предположим теперь, что X рефлексивно, и докажем импликацию (ii) $\Longrightarrow$ (i). Зафиксируем произвольную последовательность (x_n) в $\mathbb{B}_{1,X}$; наша задача — показать, что последовательность (Tx_n) имеет сходящуюся (по норме) подпоследовательность. Предположим сначала, что X сепарабельно; тогда, с учетом рефлексивности X, сепарабельно и X^* (см. задачу 8 из листка 5), поэтому шар $(\mathbb{B}_{1,X^{**}}, \mathrm{wk}^*)$ компактен и метризуем в силу следствия 27.16, и таков же гомеоморфный ему шар $(\mathbb{B}_{1,X}, \mathrm{wk})$. Следовательно, некоторая подпоследовательность (x'_n) последовательности (x_n) слабо сходится к элементу $x \in X$; но тогда последовательность (Tx'_n) сходится к Tx по норме в силу условия (ii). Это завершает доказательство импликации (ii) $\Longrightarrow$ (i) в предположениях, что X рефлексивно и сепарабельно.

Если X несепарабельно, то положим $X_0 = \overline{\operatorname{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Очевидно, X_0 сепарабельно; кроме того, оно рефлексивно (упражнение: пользуясь задачей 10 из листка 10, докажите, что любое замкнутое подпространство и любое хаусдорфово факторпространство рефлексивного банахова пространства рефлексивны). Далее, из теоремы

Хана–Банаха легко следует (убедитесь), что слабая топология на X_0 совпадает с ограничением на X_0 слабой топологии на X. Следовательно, оператор $T|_{X_0} \colon X_0 \to Y$ удовлетворяет условию (ii) и поэтому компактен в силу уже разобранного выше случая. В частности, последовательность (Tx_n) имеет сходящуюся (по норме) подпоследовательность, что и требовалось доказать. □

Упражнение 27.1. Приведите пример, показывающий, что для нерефлексивного пространства X условия (i) и (ii) теоремы 27.19 не эквивалентны.

Упражнение 27.2. Пусть X и Y — банаховы пространства. Докажите, что линейный оператор $T \colon (X, \mathrm{wk}) \to (Y, \|\cdot\|)$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен и имеет конечномерный образ. (Таким образом, слово «секвенциально» в п. (ii) теоремы 27.19 отбросить нельзя.)

Упражнение 27.3*. Пусть X и Y — банаховы пространства. Докажите, что ограниченный линейный оператор $T \colon X \to Y$ компактен тогда и только тогда, когда его ограничение $T|_{\mathbb{B}_{1,X}} \colon (\mathbb{B}_{1,X}, \mathrm{wk}) \to (Y, \|\cdot\|)$ непрерывно.

Замечание 27.11. Компактные операторы были впервые введены Ф. Риссом в 1913 г. в контексте гильбертовых пространств под названием *вполне непрерывных* операторов. Первоначальное определение Рисса было идентичным условию (ii) теоремы 27.19. Определение, эквивалентное современному определению компактного оператора, было дано также Риссом в 1918 г. Пришел он к этому определению в процессе изучения операторов в пространстве $C[a, b]$, осознав, по-видимому, что в негильбертовом случае условие (ii) уже не столь содержательно. Термин «вполне непрерывный оператор» уступил место термину «компактный оператор» под влиянием монографии Э. Хилле «Функциональный анализ и полугруппы», опубликованной в 1948 г.