А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 25

25.1. Непрерывные линейные операторы

Напомним (см. теорему 1.2), что линейный оператор между нормированными пространствами непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен. Наша ближайшая задача — доказать аналогичный критерий непрерывности для операторов между локально выпуклыми пространствами.

Пусть X — векторное пространство (пока без топологии).

Определение 25.1. Пусть p и q — полунормы на X. Говорят, что p *мажорируется* q (и пишут $p \prec q$), если существует такое $C > 0$, что $p(x) \leqslant Cq(x)$ для всех $x \in X$.

С понятием мажорирования полунорм мы фактически уже встречались ранее в контексте норм (см. лекцию 1). Так же, как для норм, соотношение $p \prec q$ равносильно тому, что топология, задаваемая полунормой p, не сильнее, чем топология, задаваемая полунормой q (см. следствие 1.4).

Введем теперь близкое по духу отношение для подмножеств пространства X.

Определение 25.2. Пусть $M, N \subseteq X$ — подмножества. Говорят, что M *поглощается* N (и пишут $M \prec N$), если существует такое $C > 0$, что для всех $\lambda \in \mathbb{K}$, удовлетворяющих условию $|\lambda| \geqslant C$, имеет место включение $M \subseteq \lambda N$.

Множество, поглощающее все одноэлементные (или, эквивалентно, конечные) множества, называется *поглощающим* (см. определение 9.2).

Отметим, что если множество N закруглено, то соотношение $M \prec N$ означает попросту, что $M \subseteq \lambda N$ для некоторого $\lambda > 0$ (убедитесь!).

Введем еще несколько обозначений. Для каждой полунормы p на X и каждого $\varepsilon > 0$ положим

$$U_{p,\varepsilon} = U_{p,\varepsilon}(0), \quad U_p = U_{p,1}.$$

Шары вида U_p играют выдающуюся роль, т.к. все остальные шары вида (24.1) через них выражаются:

$$U_{p,\varepsilon}(x) = x + U_{p,\varepsilon}, \quad U_{p,\varepsilon} = \varepsilon U_p = U_{\varepsilon^{-1}p}.$$

Если $p_1, \ldots, p_n$ — полунормы на X, то через $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i$ мы будем обозначать их «поточечный максимум», т.е. функцию $x \mapsto \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i(x)$ на X. Легко проверить (проверьте), что $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i$ — тоже полунорма.

Следующее простое предложение устанавливает взаимосвязь между введенными выше отношениями $\prec$ для полунорм и для множеств.

Предложение 25.1. *Для любых полунорм p, q на векторном пространстве X справедливы следующие утверждения:*

(i) $U_p \cap U_q = U_{\max\{p,q\}}$;

(ii) $U_p \subseteq U_q \iff q \leqslant p$;
(iii) $U_p \prec U_q \iff q \prec p$.

Доказательство. Упражнение. □

Теорема 25.2. *Пусть X — локально выпуклое пространство с топологией, порожденной семейством полунорм P. Следующие свойства полунормы q на X эквивалентны:*

(i) *q непрерывна;*
(ii) *q непрерывна в нуле;*
(iii) *существуют такие $p_1, \ldots, p_n \in P$, что $q \prec \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i$.*

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Очевидно.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Если q непрерывна в нуле, то существуют такие $p_1, \ldots, p_n \in P$ и $\varepsilon > 0$, что

$$q(U_{p_1,\ldots,p_n,\varepsilon}(0)) \subseteq [0,1). \tag{25.1}$$

Положим $p = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i$. Включение (25.1) означает в точности, что $U_{\varepsilon^{-1}p} = U_{p,\varepsilon} \subseteq U_q$, а это в силу предложения 25.1 равносильно тому, что $q \leqslant \varepsilon^{-1} p$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Выберем такое $C > 0$, что $q \leqslant Cp$, где $p = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i$. Тогда для любого $x \in X$, любого $\varepsilon > 0$ и любого $y \in U_{p,\varepsilon/C}(x)$ имеем

$$|q(y) - q(x)| \leqslant q(y - x) \leqslant Cp(y - x) < \varepsilon.$$

Это и означает, что q непрерывна в x. □

Следствие 25.3. *Пусть X — локально выпуклое пространство с топологией, порожденной семейством полунорм P. Тогда каждая полунорма из P непрерывна на X.*

Вот, наконец, и обещанный критерий непрерывности линейного оператора, обобщающий теорему 1.2.

Теорема 25.4. *Пусть X и Y — локально выпуклые пространства с топологиями, порожденными семействами полунорм P и Q соответственно. Следующие свойства линейного оператора $T \colon X \to Y$ эквивалентны:*

(i) *T непрерывен;*
(ii) *для каждой полунормы $q \in Q$ функция $q \circ T$ непрерывна на X;*
(iii) *для каждой полунормы $q \in Q$ существуют такие $C > 0$ и $p_1, \ldots, p_n \in P$, что для каждого $x \in X$ справедливо неравенство*

$$q(Tx) \leqslant C \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i(x). \tag{25.2}$$

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Следует из следствия 25.3.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Функция $q \circ T$, как нетрудно видеть, является полунормой на X, поэтому требуемая импликация вытекает из теоремы 25.2.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Положим $p = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i$. Пользуясь предложением 25.1 и линейностью оператора T, видим, что

$$\begin{aligned}(25.2) &\iff q \circ T \prec p \iff U_p \prec U_{q \circ T} \\ &\iff T(U_p) \prec U_q \iff \exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \quad T(\varepsilon U_{p,\delta}) \subseteq U_{q,\delta}.\end{aligned}$$

В силу предложения 24.3 это означает, что T непрерывен в нуле, а значит, и всюду на X (см. предложение 24.1). □

Следующее определение обобщает определение 1.4.

Определение 25.3. Пусть X — векторное пространство, P и Q — семейства полунорм на X. Говорят, что Q *мажорируется* P (и пишут $Q \prec P$), если $\tau(Q) \subseteq \tau(P)$. Если же $\tau(Q) = \tau(P)$, то семейства P и Q называют *эквивалентными* (и пишут $P \sim Q$).

Следствие 25.5. *Пусть X — векторное пространство, P и Q — семейства полунорм на X. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *$Q \prec P$;*
(ii) *каждая полунорма из Q непрерывна относительно топологии $\tau(P)$;*
(iii) *для каждой полунормы $q \in Q$ найдутся такие $p_1, \ldots, p_n \in P$, что $q \prec \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i$.*

Доказательство. Условие (i) означает в точности, что тождественный оператор из $(X, \tau(P))$ в $(X, \tau(Q))$ непрерывен. Остается применить к нему теорему 25.4. □

Конкретные примеры эквивалентных семейств полунорм см. в листке 19. Вот пример общего характера:

Пример 25.1. Пусть P — какое-либо семейство полунорм на векторном пространстве X. Обозначим через $\widehat{P}$ семейство всех $\tau(P)$-непрерывных полунорм на X. Тогда каждое семейство полунорм Q на X, удовлетворяющее условию $P \subseteq Q \subseteq \widehat{P}$, эквивалентно P. В частности,

(i) $\widehat{P} \sim P$;
(ii) $P_\infty = \left\{ \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i : p_i \in P,\ n \in \mathbb{N} \right\} \sim P$;
(iii) $P_1 = \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i : p_i \in P,\ n \in \mathbb{N} \right\} \sim P$.

Семейства полунорм $\widehat{P}$, P_∞ и P_1, упомянутые в примере 25.1, обладают следующим удобным свойством.

Определение 25.4. Семейство полунорм P на векторном пространстве X называется *направленным*, если для любых $p, q \in P$ найдется такая полунорма $r \in P$, что $\max\{p, q\} \prec r$.

То же самое определение можно дать и в топологических терминах:

Предложение 25.6. *Следующие свойства семейства полунорм P на векторном пространстве X эквивалентны:*

(i) *P направленное;*
(ii) *для каждого $x \in X$ семейство $\sigma_x = \{U_{p,\varepsilon}(x) : p \in P,\ \varepsilon > 0\}$ является базой в x для топологии $\tau(P)$;*
(iii) *семейство σ_0 является базой в нуле для топологии $\tau(P)$.*

Доказательство. См. предложение 25.1. □

Из примера 25.1 следует, что всякое семейство полунорм эквивалентно направленному семейству. Это довольно удобно; например, для направленных семейств P формулировки теорем 25.2 и 25.4 упрощаются — вместо конечных максимумов в пп. (iii) этих теорем достаточно брать одну полунорму из семейства P.

Так же, как и в случае нормированных пространств, для топологического векторного пространства X векторное пространство $\mathscr{L}(X, \mathbb{K})$ непрерывных линейных функционалов на X обозначается через X^* и называется *сопряженным* к X. В применении к линейным функционалам теорема 25.4 дает следующее:

Следствие 25.7. *Пусть X — локально выпуклое пространство с топологией, порожденной семейством полунорм P. Линейный функционал $f\colon X \to \mathbb{K}$ непрерывен тогда и только тогда, когда существуют такие $C > 0$ и $p_1, \ldots, p_n \in P$, что для каждого $x \in X$ справедливо неравенство*

$$|f(x)| \leqslant C \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i(x).$$

Теперь мы в состоянии ответить на вопрос, чем же локально выпуклые пространства так хороши по сравнению с произвольными топологическими векторными пространствами. Одна из их приятных особенностей нам уже известна: благодаря «полинормируемости» локально выпуклых пространств (см. теорему 24.11), многие утверждения о таких пространствах удобно формулировать и доказывать в терминах полунорм. Но язык полунорм — это скорее удобный «пользовательский интерфейс», чем принципиальное преимущество локально выпуклых пространств. Принципиальное же их преимущество заключается в следующем.

Предложение 25.8. *Пусть X — локально выпуклое пространство, $X_0 \subseteq X$ — векторное подпространство. Тогда для любого $f_0 \in X_0^*$ существует $f \in X^*$, продолжающий f_0.*

Доказательство. В силу следствия 25.7 и замечания 24.1, существует такая непрерывная полунорма p на X, что $|f_0(x)| \leqslant p(x)$ для всех $x \in X_0$. Остается применить теорему Хана–Банаха 9.3. □

Следствие 25.9. *Пусть X — хаусдорфово локально выпуклое пространство. Тогда для любого ненулевого $x \in X$ найдется такой $f \in X^*$, что $f(x) \neq 0$.*

Доказательство. В силу хаусдорфовости X и предложения 24.7, существует такая непрерывная полунорма p на X, что $p(x) \neq 0$. Зададим функционал $f_0\colon \mathbb{K}x \to \mathbb{K}$ формулой $f_0(\lambda x) = \lambda p(x)$. Очевидно, $|f_0(y)| = p(y)$ для любого $y \in \mathbb{K}x$, поэтому f_0 непрерывен. Остается воспользоваться предложением 25.8. □

Следствие 25.10. *Пусть X — хаусдорфово локально выпуклое пространство и $x_1, x_2 \in X$ — различные векторы. Тогда существует такой $f \in X^*$, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Ряд других следствий теоремы Хана–Банаха, в частности, теорема 9.13 о разделении выпуклых множеств, также оказываются справедливыми для произвольных хаусдорфовых локально выпуклых пространств (убедитесь). Однако без предположения локальной выпуклости ни предложение 25.8, ни его следствия уже неверны. По поводу примеров см. задачи 20.4 и 20.5 из листка 20. Таким образом, основное преимущество локально выпуклых пространств по сравнению с произвольными топологическими векторными пространствами заключается в том, что на них (в предположении хаусдорфовости) имеется достаточно много непрерывных линейных функционалов. Благодаря этому, при работе с локально выпуклыми пространствами, так же как и при работе с нормированными пространствами, можно использовать соображения двойственности. Это оказывается весьма удобным и эффективным методом их исследования.

25.2. Ограниченные множества

Определение 25.5. Подмножество топологического векторного пространства называется *ограниченным*, если оно поглощается любой окрестностью нуля.

Наблюдение 25.11. Пусть X — локально выпуклое пространство с топологией, порожденной семейством полунорм P. Тогда для ограниченности множества $B \subseteq X$ необходимо и достаточно, чтобы $B \prec U_p$ для каждой полунормы $p \in P$. Это, в свою очередь, равносильно условию $\sup_{x \in B} p(x) < \infty$ для всех $p \in P$. В частности, для нормированных пространств ограниченность в смысле определения 25.5 равносильна обычной ограниченности по норме.

В терминах ограниченных множеств можно дать следующий удобный критерий нормируемости локально выпуклого пространства.

Предложение 25.12 (критерий Колмогорова)**.** *Хаусдорфово локально выпуклое пространство нормируемо тогда и только тогда, когда в нем есть ограниченная окрестность нуля.*

Доказательство. Необходимость очевидна; докажем достаточность. Пусть X — хаусдорфово локально выпуклое пространство и $U \subseteq X$ — ограниченная окрестность нуля. Не ограничивая общности, можем считать, что U абсолютно выпукла. Из открытости U и включения $p_U(U) \subseteq [0,1]$ (см. предложение 9.12 (v)) следует, что полунорма p_U непрерывна, а из ограниченности U и предложения 25.1 (iii) — что она мажорирует любую другую непрерывную полунорму на X. Следовательно, топология на X, порожденная одной лишь полунормой p_U, совпадает с исходной (см. пример 25.1). Остается заметить, что p_U является нормой в силу хаусдорфовости X. □

Другой критерий нормируемости см. в листке 19 (задача 19.9).

Напомним (см. предложение 1.1 и теорему 1.2), что линейный оператор между нормированными пространствами непрерывен тогда и только тогда, когда он переводит ограниченные множества в ограниченные. Сохраняет ли силу этот критерий для произвольных топологических векторных пространств, или хотя бы для локально выпуклых пространств? В общем случае ответ отрицателен (см. листок 20, задача 20.10), однако кое-что все-таки сказать можно.

Предложение 25.13. *Пусть X и Y — топологические векторные пространства. Рассмотрим следующие свойства линейного оператора $T\colon X \to Y$:*

(i) *T непрерывен;*
(ii) *для любого ограниченного множества $B \subseteq X$ множество $T(B) \subseteq Y$ ограничено.*

Тогда (i) $\Longrightarrow$ (ii)*. Если же X нормируемо, то свойства* (i) *и* (ii) *эквивалентны.*

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Для любой окрестности нуля $U \subset Y$ имеем $B \prec T^{-1}(U)$, поэтому $T(B) \prec U$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Если X нормируемо и выполнено условие (ii), то для любой окрестности нуля $U \subset Y$ имеем $T(\mathbb{B}_1^\circ) \prec U$, т.е. $T(\mathbb{B}_\varepsilon^\circ) \subseteq U$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Следовательно, T непрерывен в нуле и поэтому непрерывен. □

Замечание 25.1. На самом деле импликация (ii) $\Longrightarrow$ (i) в предложении 25.13 верна для более широкого класса пространств. Локально выпуклое пространство X называется *борнологическим*, если всякое его абсолютно выпуклое подмножество, поглощающее все ограниченные множества, содержит окрестность нуля. Очевидно, всякое нормированное пространство обладает этим свойством: если какое-то множество поглощает все ограниченные множества, то оно поглощает и шар $\mathbb{B}_1^\circ$, а значит, для некоторого $\varepsilon > 0$ содержит шар $\mathbb{B}_\varepsilon^\circ$, являющийся окрестностью нуля. Можно показать (попробуйте это сделать), что всякое метризуемое локально выпуклое пространство тоже является борнологическим. Пример неборнологического пространства вы получите, если сделаете задачу 20.10 (2) из листка 20. В качестве несложного упражнения попробуйте доказать эквивалентность следующих свойств локально выпуклого пространства X:

(i) X борнологическое;
(ii) всякая полунорма на X, ограниченная на ограниченных множествах, непрерывна;
(iii) для произвольного локально выпуклого пространства Y всякий линейный оператор $T\colon X \to Y$, переводящий ограниченные множества в ограниченные, непрерывен.

Грубо говоря, борнологические пространства — это такие локально выпуклые пространства, топология которых полностью определяется запасом ограниченных множеств. Следует иметь в виду, что термин «борнологическое пространство» имеет еще и другое значение. Так называют векторные пространства, не снабженные топологией, в которых аксиоматически введено понятие ограниченного подмножества. Такие абстрактные борнологические пространства придумал в 1950-х гг. Л. Вальбрук в связи с некоторыми вопросами спектральной теории локально выпуклых алгебр. Особой популярности эти пространства, впрочем, тогда не приобрели. Ситуация кардинально изменилась сравнительно недавно, уже в 2000-х гг., когда выяснилось, что абстрактные борнологические пространства и алгебры весьма удобны для K-теории, теории циклических гомологий и некоторых других вопросов. Об этом можно прочитать в книгах J. Cuntz, J. M. Rosenberg, R. Meyer, “Topological and bivariant K-theory” и R. Meyer, “Local and analytic cyclic homomlogy”.