А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 23

23.1. Компактные операторы в гильбертовом пространстве

Про компактные операторы в банаховых пространствах нам уже довольно много известно (см. лекции 18–20). Оказывается, в гильбертовом случае можно сказать гораздо больше. Наша ближайшая цель — доказать два фундаментальных результата о компактных операторах в гильбертовом пространстве. Первый из них — теорема Гильберта–Шмидта — фактически полностью описывает строение компактных самосопряженных операторов; второй — теорема Шмидта — содержит в себе существенную информацию о произвольных компактных операторах.

Начнем со вспомогательной леммы.

Лемма 23.1. *Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства, $(e_i)_{i\in I}$ и $(f_i)_{i\in I}$ — ортонормированные системы в H_1 и H_2 соответственно, и пусть $(\lambda_i)_{i\in I} \in \ell^\infty(I)$. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *для каждого $x \in H_1$ семейство $\sum_i \lambda_i \langle x, e_i\rangle f_i$ суммируемо в H_2, и формула*

$$Tx = \sum_{i\in I} \lambda_i \langle x, e_i\rangle f_i \qquad (x \in H_1) \tag{23.1}$$

определяет ограниченный линейный оператор $T\colon H_1 \to H_2$;

(ii) *$Te_i = \lambda_i f_i$ для всех $i \in I$, и $Tx = 0$ для всех $x \perp \{e_i\}_{i\in I}$;*

(iii) *$\|T\| = \sup_{i\in I} |\lambda_i|$.*

Доказательство. Для любого конечного подмножества $J \subseteq I$ с учетом неравенства Бесселя справедлива оценка

$$\sum_{i\in J} |\lambda_i \langle x, e_i\rangle f_i|^2 \leqslant \sup_{i\in J} |\lambda_i|^2 \sum_{i\in J} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leqslant \sup_{i\in I} |\lambda_i|^2 \|x\|^2.$$

Следовательно, $\sum_i |\lambda_i \langle x, e_i\rangle f_i|^2 < \infty$ (см. определение 3.2). Применяя теорему Рисса–Фишера (следствие 6.10), видим, что семейство $\sum_i \lambda_i \langle x, e_i\rangle f_i$ суммируемо в H_2, причем

$$\Big\|\sum_{i\in I} \lambda_i \langle x, e_i\rangle f_i\Big\| \leqslant \sup_{i\in I} |\lambda_i| \|x\|. \tag{23.2}$$

Следовательно, формула (23.1) определяет оператор $T\colon H_1 \to H_2$, который, очевидно, линеен. Его ограниченность, а также неравенство $\|T\| \leqslant \sup_i |\lambda_i|$ следуют из оценки (23.2). Это доказывает утверждение (i). Утверждение (ii) очевидным образом следует из (23.1). Наконец, равенство (iii) вытекает из предыдущей оценки и из (ii) (ср. доказательство предложения 2.6). $\square$

Определение 23.1. Оператор $T\colon H_1 \to H_2$, имеющий указанный в лемме 23.1 вид, будем называть *обобщенным диагональным оператором.* Если $H_2 = H_1$ и $f_i = e_i$ для всех i, то будем называть T *диагональным оператором.*

Наблюдение 23.2. Легко видеть, что в случае бесконечномерного сепарабельного пространства H_1 диагональный оператор, понимаемый в смысле определения 23.1, унитарно эквивалентен некоторому диагональному оператору в ℓ^2 (см. предложение 2.6). Для этого достаточно дополнить систему (e_i) до ортонормированного базиса в H_1 и рассмотреть унитарный изоморфизм между H_1 и ℓ^2, переводящий полученный базис пространства H_1 в стандартный базис пространства ℓ^2.

Теорема 23.3 (Гильберт, Шмидт)**.** *Пусть T — компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *Существуют не более чем счетная ортонормированная система $(e_n)_{n<N}$ в H (где $N \in \mathbb{N}$ либо $N = \infty$), а также семейство ненулевых действительных чисел $(\lambda_n)_{n<N}$ той же мощности, такие, что для каждого $x \in H$ имеет место равенство*

$$Tx = \sum_{n<N} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n. \tag{23.3}$$

(ii) *Если оператор T представлен в виде* (23.3)*, то $\{\lambda_n\}_{n<N} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$, $Te_n = \lambda_n e_n$ для всех n, кратность каждого собственного значения λ_n конечна, и каждое ненулевое собственное значение оператора T входит в семейство $(\lambda_n)_{n<N}$ столько раз, какова его кратность. Кроме того, если $N = \infty$, то $\lim_n \lambda_n = 0$.*

Определение 23.2. Формула (23.3) называется *разложением Гильберта–Шмидта* оператора T. Из п. (ii) теоремы 23.3 следует, что оно определено оператором T однозначно с точностью до перестановки слагаемых.

Доказательство теоремы 23.3. (i) Для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$ положим $H_\lambda = \operatorname{Ker}(T - \lambda \mathbf{1})$. Положим также

$$L = \overline{\sum_{\lambda \neq 0} H_\lambda} = \overline{\sum_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}} H_\lambda}.$$

Очевидно, L инвариантно относительно T. Применяя следствие 22.23, заключаем, что и $L^\perp$ инвариантно относительно T. Таким образом, $T|_{L^\perp}$ — компактный и самосопряженный (в силу следствия 22.9) оператор в $L^\perp$. По построению, $\sigma_p(T|_{L^\perp}) \subseteq \{0\}$. С учетом теоремы 20.11 это означает, что $\sigma(T|_{L^\perp}) \subseteq \{0\}$, или, эквивалентно, $r(T|_{L^\perp}) = 0$. Применяя следствие 22.19, видим, что $T|_{L^\perp} = 0$.

Для каждого $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ выберем ортонормированный базис B_λ в H_λ. Согласно теореме 20.11, он конечен. Положим

$$B = \bigcup_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}} B_\lambda.$$

В силу следствия 22.21, B — ортонормированный базис в L, и он не более чем счетен, поскольку каждый B_λ конечен, а множество $\sigma_p(T)$ не более чем счетно по теореме 20.11.

Пусть $B = \{e_n\}_{n<N}$, где $N \in \mathbb{N}$ либо $N = \infty$. По построению, $Te_n = \lambda_n e_n$ для некоторого $\lambda_n \neq 0$, причем $\lambda_n \in \mathbb{R}$ в силу предложения 22.17. Заметим, что $|\lambda_n| \leqslant \|T\|$ для всех n, поэтому семейство $(\lambda_n)_{n<N}$ ограничено. По лемме 23.1, формула

$$Sx = \sum_{n<N} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$$

определяет ограниченный линейный оператор $S\colon H \to H$, причем $Se_n = \lambda_n e_n = Te_n$ для всех $n < N$. Следовательно, операторы S и T совпадают на L, а на $L^\perp$ они оба равны нулю. Таким образом, $S = T$, что и доказывает утверждение (i).

(ii) Пусть оператор T представлен в виде (23.3). Включение $\{\lambda_n\}_{n<N} \subseteq \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ очевидно. Предположим, что $Tx = \lambda x$ для некоторых $x \neq 0$ и $\lambda \neq 0$. С учетом (23.3) получаем

$$x = \lambda^{-1} Tx \in \operatorname{Im} T \subseteq \overline{\operatorname{span}}\{e_n\}_{n<N}.$$

Следовательно, $x = \sum_n \langle x, e_n\rangle e_n$, и равенство $Tx = \lambda x$ приобретает вид

$$\sum_{n<N} (\lambda_n - \lambda)\langle x, e_n\rangle e_n = 0. \tag{23.4}$$

Поскольку $x \neq 0$, найдется такое k, что $\langle x, e_k\rangle \neq 0$, откуда с учетом (23.4) получаем равенство $\lambda = \lambda_k$. Следовательно, $\{\lambda_n\}_{n<N} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$, как и требовалось. Применяя теорему 20.11, заключаем, что кратность каждого ненулевого собственного значения λ конечна. Заметим теперь, что равенство $Tx = \lambda x$ эквивалентно в силу (23.4) включению $x \in \operatorname{span}\{e_n : \lambda_n = \lambda\}$. Это и означает, что λ встречается в наборе $(\lambda_n)_{n<N}$ столько раз, какова его кратность. Для завершения доказательства остается заметить, что если $N = \infty$ и последовательность (λ_n) не стремится к 0, то у нее есть подпоследовательность с пределом $\mu \neq 0$, лежащим в $\sigma(T)$ в силу замкнутости последнего. Поскольку каждый член последовательности (λ_n) входит в нее лишь конечное число раз, μ является предельной точкой $\sigma(T)$. Но это противоречит изолированности всех ненулевых точек $\sigma(T)$ (см. теорему 20.11). Таким образом, если $N = \infty$, то $\lim_n \lambda_n = 0$. □

Следствие 23.4. *Пусть T — компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда в H существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора T.*

Доказательство. Достаточно дополнить ортонормированную систему (e_n) из теоремы 23.3 произвольным образом до ортонормированного базиса пространства H. □

Замечание 23.1. Из следствия 23.4 видно, что теорема Гильберта–Шмидта обобщает хорошо известный алгебраический результат о том, что всякий самосопряженный оператор в конечномерном гильбертовом пространстве в некотором ортонормированном базисе записывается диагональной матрицей.

Следствие 23.5. *Всякий компактный самосопряженный оператор в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве унитарно эквивалентен диагональному оператору в пространстве ℓ^2.*

Доказательство. См. наблюдение 23.2. □

Следующая теорема является, в сущности, переформулировкой теоремы Гильберта–Шмидта в несколько иных терминах.

Теорема 23.6 (спектральная теорема для компактного оператора)**.** *Пусть T — компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *Существует такое семейство $\mathscr{P} = \{P_\lambda : \lambda \in \sigma(T)\}$ ортогональных проекторов в H, что*

$$\operatorname{Im} P_\lambda \perp \operatorname{Im} P_\mu \quad \forall \lambda \neq \mu, \quad H = \overline{\bigoplus_{\lambda \in \sigma(T)} \operatorname{Im} P_\lambda},$$
$$T = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} \lambda P_\lambda, \tag{23.5}$$

причем семейство $\sum_\lambda \lambda P_\lambda$ суммируемо к T в топологии пространства $\mathscr{B}(H)$, задаваемой операторной нормой.

(ii) *Если семейство $\mathscr{P}$ таково, как в п.* (i)*, то $\operatorname{Im} P_\lambda = \operatorname{Ker}(T - \lambda\mathbf{1})$ для всех λ. В частности, это семейство определено оператором T однозначно.*

Доказательство. Обозначим через P_λ ортогональный проектор на подпространство $H_\lambda = \operatorname{Ker}(T - \lambda\mathbf{1})$. В силу следствия 22.21, $H_\lambda \perp H_\mu$ при $\lambda \neq \mu$. Применяя следствие 23.4, получаем разложение $H = \overline{\bigoplus_{\lambda \in \sigma(T)} H_\lambda}$. Равенство $Tx = \sum_\lambda \lambda P_\lambda x$, справедливое для всех $x \in H$, — это просто переформулировка разложения Гильберта–Шмидта (23.3). Остается проверить, что семейство $\sum_\lambda \lambda P_\lambda$ суммируемо к T по операторной норме (а не просто на каждом фиксированном векторе из H). С этой целью заметим, что для любого конечного подмножества $J \subseteq \sigma(T)$ справедлива оценка

$$\Big\| T - \sum_{\lambda \in J} \lambda P_\lambda \Big\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \Big\| \sum_{\lambda \in \sigma(T) \setminus J} \lambda P_\lambda x \Big\| \leqslant \sup_{\lambda \in \sigma(T) \setminus J} |\lambda|. \tag{23.6}$$

Но из п. (ii) теоремы 23.3 следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое конечное подмножество $J_0 \subseteq \sigma(T)$, что $\sup_{\lambda \in \sigma(T) \setminus J_0} |\lambda| < \varepsilon$. Отсюда и из (23.6) получаем (23.5).

(ii) Если $x \in \operatorname{Im} P_\lambda$, то из (23.5) получаем $Tx = \lambda x$, т.е. $x \in \operatorname{Ker}(T - \lambda\mathbf{1})$. Обратно, если $Tx = \mu x$, то из (23.5) и из равенства $x = \sum_\lambda P_\lambda x$ получаем, что $\sum_\lambda (\lambda - \mu) P_\lambda x = 0$. Следовательно, $P_\lambda x = 0$ для всех $\lambda \neq \mu$, а это и означает, что $x \in \operatorname{Im} P_\mu$. □

Обратимся теперь к произвольным (не обязательно самосопряженным) компактным операторам между, вообще говоря, различными гильбертовыми пространствами.

Теорема 23.7 (Шмидт)**.** *Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства и $T\colon H_1 \to H_2$ — компактный оператор. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *Существуют не более чем счетные ортонормированные системы $(e_n)_{n<N}$ в H_1 и $(f_n)_{n<N}$ в H_2 (где $N \in \mathbb{N}$ либо $N = \infty$), а также семейство положительных чисел $(s_n)_{n<N}$ той же мощности, такие, что $s_n \geqslant s_{n+1}$ для всех n, и для каждого $x \in H$ имеет место равенство*

$$Tx = \sum_{n<N} s_n \langle x, e_n \rangle f_n. \tag{23.7}$$

При этом, если $N = \infty$, то $\lim_n s_n = 0$.

(ii) *Если оператор T представлен в виде (23.7), то $\{s_n^2\}_{n<N} = \sigma_p(T^*T) \setminus \{0\}$, $Te_n = s_n f_n$ для всех n, и каждое ненулевое собственное значение оператора T^*T входит в семейство $(s_n^2)_{n<N}$ столько раз, какова его кратность. В частности, семейство $(s_n)_{n<N}$ определено оператором T однозначно.*

Определение 23.3. Формула (23.7) называется *разложением Шмидта* оператора T, а числа $s_n = s_n(T)$ из (23.7) — его *s-числами.*

Для доказательства нам понадобится простая лемма.

Лемма 23.8. *Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства, $T\colon H_1 \to H_2$ — ограниченный линейный оператор, $S = T^*T\colon H_1 \to H_1$. Тогда $\sigma_p(T) \subset [0, +\infty)$.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma_p(T)$, и пусть $x \in H_1$ таков, что $Sx = \lambda x$. Тогда

$$\lambda\langle x, x\rangle = \langle Sx, x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle \geqslant 0.$$

Следовательно, $\lambda \geqslant 0$, как и требовалось. $\square$

Замечание 23.2. На самом деле в предположениях леммы 23.8 справедливо включение $\sigma(S) \subset [0, +\infty)$. На данном этапе этот результат нам не нужен, мы докажем его позже.

Доказательство теоремы 23.7. (i) Оператор $S = T^*T\colon H_1 \to H_1$ компактен и самосопряжен, поэтому к нему применима теорема Гильберта–Шмидта 23.3. Пусть $Sx = \sum_{n<N} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$ — его разложение Гильберта–Шмидта. В силу леммы 23.8, $\lambda_n > 0$ для всех n. Переупорядочим векторы e_n и числа λ_n таким образом, чтобы $\lambda_n \geqslant \lambda_{n+1}$ для всех n (это можно сделать, т.к. если $N = \infty$, то $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$). Для каждого n положим $s_n = \sqrt{\lambda_n}$ и $f_n = s_n^{-1} T e_n$. Для любых m, n имеем

$$\langle Te_m, Te_n\rangle = \langle Se_m, e_n\rangle = s_m^2 \delta_{mn},$$

откуда следует, что $(f_n)_{n<N}$ — ортонормированная система в H_2. Положим $L = \overline{\operatorname{span}}\{e_n : n < N\}$ и, пользуясь леммой 23.1, зададим оператор $T_0 \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$ формулой

$$T_0 x = \sum_{n<N} s_n \langle x, e_n\rangle f_n \qquad (x \in H_1).$$

Для каждого n имеем $T_0 e_n = s_n f_n = Te_n$, поэтому $T|_L = T_0|_L$. Если $x \in L^\perp$, то $Sx = 0$, поэтому $\langle Tx, Tx\rangle = \langle Sx, x\rangle = 0$, т.е. $Tx = 0$. Таким образом, $T|_{L^\perp} = T_0|_{L^\perp} = 0$ и, следовательно, $T = T_0$. Это доказывает утверждение (i).

(ii) Пусть оператор T представлен в виде (23.7). Для любого $x \in H_1$ и любого m имеют место равенства

$$\langle x, T^* f_m\rangle = \langle Tx, f_m\rangle = \sum_{n<N} s_n \langle x, e_n\rangle \langle f_n, f_m\rangle = \langle x, s_m f_m\rangle,$$

откуда следует, что $T^* f_m = s_m e_m$ для всех m. Применяя к (23.7) оператор T^*, получаем равенство

$$T^*Tx = \sum_{n<N} s_n^2 \langle x, e_n\rangle e_n \qquad (x \in H_1),$$

представляющее собой разложение Гильберта–Шмидта оператора T^*T. В результате доказываемое утверждение сводится к п. (ii) теоремы 23.3. $\square$

23.2. Приложение: задача Штурма–Лиувилля

В качестве иллюстрации теоремы Гильберта–Шмидта покажем, как она используется в одной классической задаче из теории дифференциальных уравнений. Пусть p, q — непрерывные функции на отрезке $[0, \ell]$, причем $p(x) > 0$ и $q(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [0, \ell]$. Зафиксируем $\lambda \in \mathbb{R}$. Уравнение

$$-(pu')' + qu = \lambda u \tag{23.8}$$

относительно неизвестной функции $u \in C^2[0, \ell]$ называется *уравнением Штурма–Лиувилля*. Рассмотрим также граничные условия

$$\begin{cases} \alpha u'(0) + \beta u(0) = 0, \\ \gamma u'(\ell) + \delta u(\ell) = 0, \end{cases} \tag{23.9}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ — произвольные числа, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ и $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$. Задача нахождения функции $u \in C^2[0, \ell]$, удовлетворяющей уравнению (23.8) и граничным условиям (23.9), называется *задачей Штурма–Лиувилля*.

Задача Штурма–Лиувилля естественно возникает в ряде вопросов математической физики, и про ее решения много что известно (см., например, учебник В. С. Владимирова «Уравнения математической физики»). Сразу предупредим, что бóльшая часть того, что известно про задачу Штурма–Лиувилля, обсуждаться ниже не будет. Наша скромная цель будет состоять в том, чтобы с помощью теоремы Гильберта–Шмидта получить информацию о множестве тех $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых задача Штурма–Лиувилля имеет нетривиальное решение, а также о кратностях этих решений.

В целях упрощения изложения мы будем рассматривать задачу Штурма–Лиувилля в следующем частном случае:

$$-u'' + qu = \lambda u, \tag{23.10}$$

$$u(0) = u(\ell) = 0. \tag{23.11}$$

Вся специфика задачи Штурма–Лиувилля будет видна уже на этом примере; общий случай отличается лишь некоторыми деталями.

Для удобства мы будем работать над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел; как мы увидим ниже, интересующие нас значения λ окажутся действительными автоматически.

Положим

$$\mathscr{D}_L = \{u \in C^2[0, \ell] : u(0) = u(\ell) = 0\}$$

и рассмотрим *оператор Штурма–Лиувилля*

$$L \colon \mathscr{D}_L \to C[0, \ell], \quad Lu = -u'' + qu.$$

Во введенных обозначениях задача (23.10)–(23.11) приобретает вид $Lu = \lambda u$. Таким образом, те $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых она имеет нетривиальное решение, — это собственные значения оператора L. Следует, однако, иметь в виду, что оператор L действует между *разными* пространствами, поэтому говорить о его собственных значениях в том смысле, как это принято в линейной алгебре, вообще не имеет смысла. Общий подход к задачам такого рода основан на том, что, как мы увидим ниже, обратный оператор L^{-1}

является ограничением некоторого интегрального оператора Гильберта–Шмидта (см. примеры 2.7 и 19.3, а также теорему 20.13) в пространстве $L^2[0,\ell]$. В частности, такой оператор компактен и, как мы увидим, самосопряжен, поэтому к нему можно будет применить всю развитую выше технику.

Лемма 23.9. *Пусть $u \in \mathscr{D}_L$, $u \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $Lu = \lambda u$. Тогда $\lambda > 0$.*

Доказательство. Интегрирование по частям показывает, что если $u \in \mathscr{D}_L$ и $u \neq 0$, то $\langle Lu, u\rangle > 0$ (убедитесь). Дальнейшее очевидно. □

Следствие 23.10. $\operatorname{Ker} L = 0$.

Зафиксируем теперь два нетривиальных действительных решения u_1, u_2 уравнения

$$-u'' + qu = 0, \tag{23.12}$$

удовлетворяющие условиям $u_1(0) = u_2(\ell) = 0$. Отметим, что если наложить дополнительные условия типа $u_1'(0) = a$ и $u_2'(\ell) = b$, то такие решения не только существуют, но и единственны в силу теоремы существования и единственности задачи Коши. Для наших целей явные значения a и b не важны.

Лемма 23.11. *Функции u_1 и u_2 линейно независимы.*

Доказательство. Предположим, что u_1 и u_2 линейно зависимы. Тогда $u_1(0) = u_1(\ell) = 0$, т.е. $u_1 \in \mathscr{D}_L$, и $Lu_1 = 0$ в силу (23.12). Но это противоречит следствию 23.10. □

Введем в рассмотрение *определитель Вронского*

$$W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}.$$

Лемма 23.12. *Функция W — ненулевая константа.*

Доказательство. Простая проверка показывает (убедитесь), что $W' = 0$, так что W — константа. Если $W = 0$, то столбцы матрицы $\left(\begin{smallmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{smallmatrix}\right)$ линейно зависимы в каждой точке отрезка $[0,\ell]$, в частности, в точке 0. Но, как известно из курса дифференциальных уравнений, сопоставление $u \mapsto (u(0), u'(0))$ является изоморфизмом между пространством решений уравнения (23.12) и $\mathbb{R}^2$. Следовательно, u_1 и u_2 линейно зависимы, что противоречит лемме 23.11. □

Теорема 23.13. *Оператор $L\colon \mathscr{D}_L \to C[0,\ell]$ биективен, и его обратный оператор задается формулой*

$$(L^{-1}f)(x) = \int_0^\ell G(x,y) f(y)\, dy \qquad (f \in C[0,\ell]),$$

где

$$G(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{W}\, u_1(x) u_2(y) & \text{при } x \leqslant y, \\ -\dfrac{1}{W}\, u_2(x) u_1(y) & \text{при } x > y. \end{cases}$$

Доказательство теоремы — простое упражнение на дифференцирование. Более интересная задача — не пользоваться «данными свыше» формулами для оператора L^{-1} и функции G, а вывести их с помощью метода вариации постоянных.

Функция G, фигурирующая в теореме 23.13, называется *функцией Грина* оператора L. Заметим, что она непрерывна на квадрате $[0,\ell]\times[0,\ell]$ и удовлетворяет условию $G(y,x)=G(x,y)$ для всех $x,y\in[0,\ell]$.

Введем в рассмотрение интегральный оператор Гильберта–Шмидта (см. пример 2.7)

$$G\colon L^2[0,\ell]\to L^2[0,\ell],\quad (Gf)(x)=\int_0^\ell G(x,y)f(y)\,dy$$

(следуя традиции, мы обозначаем его той же буквой G, что и функцию Грина; к путанице это не приведет). Как уже упоминалось в примере 19.3, этот оператор компактен, а равенство $G(x,y)=G(y,x)\in\mathbb{R}$ влечет за собой его самосопряженность (см. листок 18, задача 18.1 (5)). Из теоремы 23.13 следует, что $G|_{C[0,\ell]}=L^{-1}$.

Лемма 23.14. *Пусть $f\in L^2[0,\ell]$ и $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *$f\in\mathscr{D}_L$ и $Lf=\lambda f$ (т.е. f — решение задачи* (23.10)–(23.11));
(ii) *$Gf=\lambda^{-1}f$.*

Если эти условия выполнены, то $\lambda>0$.

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Применяя теорему 23.13, получаем $f=GLf=\lambda Gf$, т.е. $Gf=\lambda^{-1}f$. То, что $\lambda>0$, следует из леммы 23.9.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Из непрерывности функции G следует (убедитесь!), что $\operatorname{Im}G\subseteq C[0,\ell]$. Поэтому $f=\lambda Gf\in C[0,\ell]$. Но $G|_{C[0,\ell]}=L^{-1}$ по теореме 23.13, поэтому $f=\lambda L^{-1}f\in\operatorname{Im}L^{-1}=\mathscr{D}_L$ и $Lf=\lambda f$. □

Таким образом, ненулевые собственные значения оператора G в точности обратны собственным значениям оператора L. Что же до числа 0, то оно вообще не является собственным значением оператора G:

Лемма 23.15. $\operatorname{Ker}G=0$.

Доказательство. Из самосопряженности G следует, что $\operatorname{Ker}G=(\operatorname{Im}G)^\perp$ (см. предложение 22.5). С другой стороны, $\operatorname{Im}G\supseteq\mathscr{D}_L$, а $\mathscr{D}_L$ плотно в $L^2[0,\ell]$ (докажите). Следовательно, $\operatorname{Ker}G=0$, как и требовалось. □

Лемма 23.16. *Каждое собственное значение оператора G имеет кратность* 1.

Доказательство. Зафиксируем $\lambda\in\sigma_p(G)$ и предположим, что существуют линейно независимые функции $v_1,v_2\in\operatorname{Ker}(G-\lambda\mathbf{1})$. Согласно лемме 23.15, $\lambda\neq 0$. Применяя лемму 23.14, заключаем, что $\lambda>0$ и что функции v_1,v_2 являются решениями уравнения

$$-u''+qu=\lambda^{-1}u. \tag{23.13}$$

Из курса дифференциальных уравнений известно, что пространство V его решений двумерно. Следовательно, $V=\operatorname{span}\{v_1,v_2\}$. Но $v_1,v_2\in\mathscr{D}_L$ в силу леммы 23.14, поэтому $V\subset\mathscr{D}_L$, и, в частности, каждое решение u уравнения (23.13) удовлетворяет условию $u(0)=0$. Это противоречит теореме существования решения задачи Коши. Следовательно, таких функций v_1,v_2 не существует, и $\dim\operatorname{Ker}(G-\lambda\mathbf{1})=1$. □

Следующая теорема дает нам желаемую информацию о собственных значениях оператора Штурма–Лиувилля и об их кратностях.

Теорема 23.17. *Существуют последовательность* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *положительных чисел и ортонормированный базис* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *в пространстве* $L^2[0,\ell]$*, такие, что*

(i) *последовательность* (λ_n) *строго возрастает и стремится к* ∞*;*
(ii) $e_n \in \mathscr{D}_L$ *для всех* n*;*
(iii) *задача Штурма–Лиувилля* (23.10)–(23.11) *имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда* $\lambda = \lambda_n$ *для некоторого* n*; соответствующее решение имеет вид* $u = Ce_n$*, где* C *— произвольная константа.*

Доказательство. Запишем разложение Гильберта–Шмидта (23.3) оператора G в виде

$$Gf = \sum_{n<N} \lambda_n^{-1} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

Из леммы 23.14 следует, что $\lambda_n > 0$ для всех n. Применяя лемму 23.15, получаем, что $\{e_n\}_{n<N}^{\perp} = \operatorname{Ker} G = 0$. Следовательно, $(e_n)_{n<N}$ — ортонормированный базис в $L^2[0,\ell]$. В частности, $N = \infty$, и $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$ (см. теорему 23.3). Применяя лемму 23.16, заключаем, что $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Поэтому, переупорядочивая числа (λ_n) и векторы (e_n), мы можем считать, что последовательность (λ_n) строго возрастает. Далее, из соотношения $Ge_n = \lambda_n^{-1} e_n$, согласно лемме 23.14, следует, что e_n — решение задачи (23.10)–(23.11) при $\lambda = \lambda_n$. Из той же леммы и из леммы 23.16 вытекает, что это решение единственно с точностью до постоянного множителя. Наконец, согласно лемме 23.14 и теореме 23.3, для $\lambda \notin \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ задача (23.10)–(23.11) имеет лишь тривиальное решение. □

Доказанная теорема по сути дает разложение оператора Штурма–Лиувилля L по его собственным функциям. Разложение дифференциальных операторов по собственным функциям — классическая и хорошо развитая область математики, относящаяся в основном к области дифференциальных уравнений, но существенно опирающаяся на методы функционального анализа. Об этих вещах можно прочитать, например, в книгах М. А. Наймарка «Линейные дифференциальные операторы» и Ю. М. Березанского «Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов».