А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 22

22.1. Операторы в гильбертовом пространстве. Сопряженный оператор

До сих пор мы занимались линейными операторами между произвольными банаховыми пространствами; сосредоточимся теперь на операторах в гильбертовом пространстве. Основная специфика гильбертова случая состоит в том, что на алгебре $\mathscr{B}(H)$ ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H имеется дополнительная операция — *инволюция*, или переход к сопряженному оператору. Наличие этой операции существенно обогащает теорию операторов и расширяет диапазон ее приложений.

Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства и $T\colon H_1 \to H_2$ — ограниченный линейный оператор. У него, как и у всякого ограниченного линейного оператора между нормированными пространствами, есть сопряженный оператор $T^*\colon H_2^* \to H_1^*$ (см. определение 7.2). Вспомним теперь теорему Рисса 7.3, согласно которой для любого гильбертова пространства H существует антилинейная изометрическая биекция

$$R_H\colon H \to H^*, \quad [R_H(x)](y) = \langle y, x\rangle \qquad (x, y \in H).$$

Используя биекции $R_1 = R_{H_1}$ и $R_2 = R_{H_2}$, можно «заставить» сопряженный оператор T^* действовать не между сопряженными пространствами H_2^* и H_1^*, а между самими пространствами H_2 и H_1. Формальное определение таково.

Определение 22.1. Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства и $T\colon H_1 \to H_2$ — ограниченный линейный оператор. Оператор

$$T^\dagger\colon H_2 \to H_1, \quad T^\dagger = R_1^{-1} T^* R_2,$$

называется *гильбертово сопряженным* к T.

Иначе говоря, $T^\dagger$ однозначно определен следующей коммутативной диаграммой:

$$\begin{tikzcd} H_2^* \arrow[r, "T^*"] & H_1^* \\ H_2 \arrow[u, "R_2"] \arrow[r, "T^\dagger"] & H_1 \arrow[u, "R_1"'] \end{tikzcd} \tag{22.1}$$

Предложение 22.1. *Оператор $T^\dagger$ линеен, ограничен, и $\|T^\dagger\| = \|T\|$.*

Доказательство. Линейность $T^\dagger$ следует из того, что T^* линеен, а R_1 и R_2 антилинейны. Ограниченность $T^\dagger$ и равенство $\|T^\dagger\| = \|T\|$ следуют из равенства $\|T^*\| = \|T\|$ и изометричности R_1 и R_2. $\square$

Полезно иметь следующую характеризацию оператора $T^\dagger$, не использующую сопряженных пространств.

Предложение 22.2. *Оператор $T^\dagger$ — это единственное отображение из H_2 в H_1, удовлетворяющее любому из следующих эквивалентных условий:*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^\dagger y\rangle \qquad (x \in H_1,\ y \in H_2); \tag{22.2}$$

$$\langle T^\dagger y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle \qquad (x \in H_1,\ y \in H_2). \tag{22.3}$$

Доказательство. Эквивалентность условий (22.2) и (22.3) очевидна. Заметим теперь, что условие (22.2) может быть записано в виде

$$[R_1(T^\dagger y)](x) = [R_2(y)](Tx) = [T^*(R_2(y))](x) \qquad (x \in H_1,\ y \in H_2).$$

Но это и означает, что $R_1 T^\dagger = T^* R_2$, т.е. $T^\dagger = R_1^{-1} T^* R_2$. □

Конечно, операторы T^* и $T^\dagger$ — это, строго говоря, не одно и то же. Тем не менее из формулы $T^\dagger = R_1^{-1} T^* R_2$ и изометричности R_1 и R_2 легко понять, что у этих операторов много общего. В частности, инъективность (сюръективность) $T^\dagger$ равносильна инъективности (сюръективности) T^*, изометричность (коизометричность) $T^\dagger$ — изометричности (коизометричности) T^*, и т.п. (продолжите список сами). Поэтому обычно принимают следующее соглашение.

Соглашение 22.1. Гильбертово сопряженный оператор $T^\dagger \colon H_2 \to H_1$ будет в дальнейшем обозначаться через T^* и называться *сопряженным* к T.

К путанице это соглашение обычно не приводит[1]. Если оператор действует между гильбертовыми пространствами H_1 и H_2, то необходимости рассматривать его «обычный» сопряженный оператор $T^* \colon H_2^* \to H_1^*$, как правило, нет. Поэтому для операторов между гильбертовыми пространствами под сопряженным оператором по умолчанию всегда понимается гильбертово сопряженный оператор.

Предложение 22.3. *Пусть H_1, H_2, H_3 — гильбертовы пространства.*

(i) *Если $S, T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, то $(\lambda S + \mu T)^* = \bar\lambda S^* + \bar\mu T^*$.*
(ii) *Если $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$ и $S \in \mathscr{B}(H_2, H_3)$, то $(ST)^* = T^* S^*$.*
(iii) *$T^{**} = T$ для всех $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$;*
(iv) *$\|T^*\| = \|T\|$ для всех $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$;*
(v) (C^*-тождество) *$\|T^*T\| = \|T\|^2$ для всех $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$.*

Доказательство. Утверждения (i) и (ii) сразу следуют из аналогичных свойств сопряженных операторов между сопряженными пространствами (см. предложение 7.1) и диаграммы (22.1). Утверждение (iii) — простое следствие предложения 22.2. Утверждение (iv) уже упоминалось выше (предложение 22.1). Чтобы доказать (v), заметим, что

$$\|T^*T\| \leqslant \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$$

в силу (iv). С другой стороны, из неравенства Коши–Буняковского–Шварца следует, что

$$\|T\|^2 = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \langle Tx, Tx\rangle = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \langle T^*Tx, x\rangle \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|T^*Tx\| = \|T^*T\|.$$ □

[1] Интересно, что физики в этом отношении более последовательны, чем математики: гильбертово сопряженный оператор они чаще всего обозначают именно $T^\dagger$.

Свойства операции $T \mapsto T^*$, сформулированные в предложении 22.3, приводят к следующим определениям.

Определение 22.2. Пусть A — алгебра (как обычно, ассоциативная и над $\mathbb{C}$). Отображение $A \to A$, $a \mapsto a^*$, называется *инволюцией*, если оно удовлетворяет условиям (i)–(iii) предложения 22.3. Алгебра, снабженная инволюцией, называется *инволютивной алгеброй* или *$*$-алгеброй*.

Инволютивная банахова алгебра или *банахова $*$-алгебра* — это банахова алгебра, снабженная изометрической инволюцией.

Наконец, *C^*-алгебра* — это инволютивная банахова алгебра, в которой выполняется C^*-тождество (v) из предложения 22.3.

Определение 22.3. Подалгебра B $*$-алгебры A называется *$*$-подалгеброй*, если для любого $b \in B$ выполнено $b^* \in B$.

Очевидно, любая $*$-подалгебра сама является $*$-алгеброй. Если A — банахова $*$-алгебра (соответственно, C^*-алгебра), то любая ее замкнутая $*$-подалгебра является банаховой $*$-алгеброй (соответственно, C^*-алгеброй).

Пример 22.1. Поле $\mathbb{C}$ является C^*-алгеброй относительно инволюции $\lambda^* = \bar{\lambda}$.

Пример 22.2. Если H — гильбертово пространство, то $\mathscr{B}(H)$ — C^*-алгебра (см. предложение 22.3). То же самое верно и для любой ее замкнутой $*$-подалгебры. В частности, $\mathscr{K}(H)$ — C^*-алгебра.

Пример 22.3. Если X — множество, то $\ell^\infty(X)$ — C^*-алгебра относительно инволюции $f^*(x) = \overline{f(x)}$.

Пример 22.4. Если X — топологическое пространство, то $C_b(X)$ и $C_0(X)$ — замкнутые $*$-подалгебры в $\ell^\infty(X)$ и, следовательно, являются C^*-алгебрами. В частности, если X компактно, то $C(X)$ — C^*-алгебра.

Пример 22.5. Если (X, μ) — пространство с мерой, то $L^\infty(X, \mu)$ — C^*-алгебра относительно той же инволюции, что и в примере 22.3.

Пример 22.6. Алгебра $C^n[a, b]$ (см. пример 15.7) является банаховой $*$-алгеброй относительно той же инволюции, что и в примере 22.3, однако не является C^*-алгеброй (см. листок 18).

Пример 22.7. Дисковая алгебра $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$ (см. пример 15.8) является банаховой $*$-алгеброй относительно инволюции $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$, однако не является C^*-алгеброй (см. листок 18).

Определение 22.4. Если A, B — $*$-алгебры, то гомоморфизм $\varphi\colon A \to B$ называется *инволютивным гомоморфизмом* или *$*$-гомоморфизмом*, если $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$ для всех $a \in A$.

Пример 22.8. Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Для каждой $f \in L^\infty(X, \mu)$ обозначим через M_f оператор умножения на f, действующий в $L^2(X, \mu)$ (см. пример 2.5). Легко видеть, что отображение

$$L^\infty(X, \mu) \to \mathscr{B}(L^2(X, \mu)), \quad f \mapsto M_f,$$

является $*$-гомоморфизмом.

Теория C^*-алгебр — это довольно обширная и очень красивая наука, имеющая много приложений в теории операторов, топологии, некоммутативной геометрии и теории квантовых групп. В этом курсе C^*-алгебры будут встречаться нам лишь эпизодически; более подробно познакомиться ними желающие смогут на спецкурсе, запланированном на следующий учебный год.

Вернемся к операторам между гильбертовыми пространствами. С каждым таким оператором удобно связать некоторую полуторалинейную форму:

Определение 22.5. Пусть H_1, H_2 — предгильбертовы пространства и $T\colon H_1 \to H_2$ — линейный оператор. Легко видеть, что функция

$$f_T\colon H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}, \quad f_T(x,y) = \langle Tx, y\rangle,$$

является полуторалинейной формой. Говорят, что f_T *ассоциирована* с T. Если $H_2 = H_1$, то ассоциированная с f_T комплексно-квадратичная форма (см. определение 4.3)

$$q_T\colon H_1 \to \mathbb{C}, \quad q_T(x) = f_T(x,x) = \langle Tx, x\rangle,$$

называется *комплексно-квадратичной формой, ассоциированной с T.*

Следующее предложение показывает, что формы f_T и q_T содержат в себе всю информацию об операторе T.

Предложение 22.4. *Пусть H_1, H_2 — предгильбертовы пространства, $S, T\colon H_1 \to H_2$ — линейные операторы. Тогда:*

(i) $S = T \iff f_S = f_T$;
(ii) *если $H_1 = H_2$, то $S = T \iff q_S = q_T$.*

Доказательство. (i) Достаточно доказать, что $T = 0$ тогда и только тогда, когда $f_T = 0$ (объясните, почему). Очевидно, если $T = 0$, то $f_T = 0$. Обратно, если $f_T = 0$, то $\langle Tx, Tx\rangle = 0$ для всех $x \in H_1$, а значит, $T = 0$.

(ii) Следует из (i) и следствия 4.8. □

Обсудим взаимосвязь между свойствами оператора и его сопряженного. Следующие два предложения легко выводятся из доказанных ранее утверждениях об операторах между банаховыми пространствами.

Предложение 22.5. *Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства и $T\colon H_1 \to H_2$ — ограниченный линейный оператор. Справедливы следующие утверждения:*

(i) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$;
(ii) $\overline{\operatorname{Im} T} = (\operatorname{Ker} T^*)^\perp$;
(iii) $H_2 = \overline{\operatorname{Im} T} \oplus \operatorname{Ker} T^*$;
(iv) *T топологически инъективен $\iff$ T^* сюръективен;*
(v) *T изометричен $\iff$ T^* коизометричен.*

Доказательство. (i), (ii) Следует из предложения 13.8 с учетом того, что каноническая биекция между гильбертовым пространством и его сопряженным переводит ортогональное дополнение в аннулятор (см. наблюдение 13.1).

(iii) Следует из (ii) с учетом теоремы 5.9 об ортогональном дополнении.

(iv), (v) Следует из теорем 13.10 и 13.12. □

Предложение 22.6. *Пусть H — гильбертово пространство и $T \in \mathscr{B}(H)$. Тогда*

(i) $\sigma(T^*) = \{\bar\lambda : \lambda \in \sigma(T)\}$;
(ii) $\sigma_p(T^*) \subseteq \{\bar\lambda : \lambda \in \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)\}$;
(iii) $\sigma_c(T^*) = \{\bar\lambda : \lambda \in \sigma_c(T)\}$;
(iv) $\sigma_r(T^*) \subseteq \{\bar\lambda : \lambda \in \sigma_p(T)\}$.

Доказательство. Следует из предложений 16.10 и 16.11 с учетом того, что $(T - \lambda\mathbf{1})^* = T^* - \bar\lambda\mathbf{1}$. □

Введем теперь операторы, которые играют очень важную роль как в самом функциональном анализе, так и во всевозможных его приложениях.

Определение 22.6. Пусть A — $*$-алгебра. Элемент $a \in A$ называется *самосопряженным* (или *эрмитовым*), если $a^* = a$. Если H — гильбертово пространство, то *ограниченный самосопряженный оператор*[1] в H — это самосопряженный элемент алгебры $\mathscr{B}(H)$.

Пример 22.9. Если A — любая из функциональных $*$-алгебр, упомянутых в примерах 22.3–22.6, то функция $f \in A$ является самосопряженным элементом тогда и только тогда, когда $f(x) \in \mathbb{R}$ для всех (в примере 22.5 — для почти всех) x.

На инволюцию в алгебре $\mathscr{B}(H)$ можно смотреть как на аналог операции комплексного сопряжения в $\mathbb{C}$. С этой точки зрения самосопряженные операторы играют роль действительных чисел. Следующее предложение подчеркивает эту аналогию.

Предложение 22.7. *Пусть A — $*$-алгебра. Каждый элемент $a \in A$ единственным образом представим в виде $a = b + ic$, где $b, c \in A$ — самосопряженные элементы.*

Доказательство. Легко видеть, что элементы

$$b = \frac{a + a^*}{2}, \quad c = \frac{a - a^*}{2i}$$

удовлетворяют нужным условиям. Единственность докажите сами в качестве упражнения. □

Самосопряженные операторы нетрудно охарактеризовать в терминах соответствующих полуторалинейных и комплексно-квадратичных форм.

Предложение 22.8. *Пусть H — гильбертово пространство. Следующие свойства оператора $T \in \mathscr{B}(H)$ эквивалентны:*

(i) $T^* = T$;
(ii) $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ *для всех* $x, y \in H$;
(iii) $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ *для всех* $x \in H$.

Доказательство. (i) $\iff$ (ii). Следует из предложения 22.2.

(ii) $\iff$ (iii). Заметим, что равенство (i) означает в точности, что форма f_T эрмитова (см. определение 4.4). Остается воспользоваться следствием 4.9. □

[1] Следует отметить, что не менее важную роль в приложениях (в том числе в квантовой механике) играют *неограниченные* самосопряженные операторы. К сожалению, на их обсуждение у нас, скорее всего, не хватит времени…

Следствие 22.9. *Пусть H — гильбертово пространство, $T \in \mathscr{B}(H)$ — самосопряженный оператор и $H_0 \subseteq H$ — замкнутое T-инвариантное подпространство. Тогда $T|_{H_0}$ — самосопряженный оператор в H_0.*

Доказательство. См. п. (iii) предложения 22.8. □

К обсуждению самосопряженных операторов мы еще не раз вернемся и докажем про них несколько важных теорем. Основным результатом о самосопряженных операторах является так называемая *спектральная теорема*, которая полностью описывает строение таких операторов, а при надлежащей интерпретации классифицирует их с точностью до унитарной эквивалентности. Для компактных операторов спектральная теорема превращается в теорему Гильберта–Шмидта о диагонализации, которую мы докажем на следующей лекции. Спектральная теорема для произвольных ограниченных самосопряженных операторов будет доказана в конце нашего курса.

Следующий класс операторов включает в себя как самосопряженные, так и унитарные операторы.

Определение 22.7. Пусть A — $*$-алгебра. Элемент $a \in A$ называется *нормальным*, если $aa^* = a^*a$. Если H — гильбертово пространство, то *ограниченный нормальный оператор* в H — это нормальный элемент алгебры $\mathscr{B}(H)$.

Многие утверждения, которые мы будем доказывать впоследствии для самосопряженных операторов, сохраняют силу и для нормальных операторов. См. по этому поводу задачи из листка 18.

Одна из замечательных особенностей инволюции в $\mathscr{B}(H)$ состоит в том, что с ее помощью многие геометрические свойства линейных операторов могут быть записаны в виде простых алгебраических тождеств. Приведем несколько иллюстраций этого принципа.

Предложение 22.10. *Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства и $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$. Тогда:*

(i) *T — изометрия тогда и только тогда, когда $T^*T = \mathbf{1}_{H_1}$;*
(ii) *T — коизометрия тогда и только тогда, когда $TT^* = \mathbf{1}_{H_2}$.*

Доказательство. (i) Оператор T изометричен тогда и только тогда, когда

$$\langle x, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \quad \text{для всех } x \in H_1,$$

т.е. тогда и только тогда, когда $q_{T^*T} = q_{\mathbf{1}_{H_1}}$. Остается воспользоваться предложением 22.4.

(ii) Следует из (i) и предложения 22.5 (v). □

Следствие 22.11. *Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства. Линейный оператор $U \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$ унитарен (см. определение 5.1) тогда и только тогда, когда он обратим и $U^* = U^{-1}$.*

Предложение 22.12. *Пусть H — гильбертово пространство. Следующие свойства оператора $P \in \mathscr{B}(H)$ эквивалентны:*

(i) *P — проектор и* $\operatorname{Im} P \perp \operatorname{Ker} P$*;*

(ii) $P^* = P = P^2$.

Доказательство. Заметим, что для $P \in \mathscr{B}(H)$ равенства $P = P^2$ и $P^* = (P^*)^2$ эквивалентны. Иначе говоря, P — проектор тогда и только тогда, когда P^* — проектор (см. определение 12.3). Ясно, что два проектора равны тогда и только тогда, когда у них одинаковые ядра и образы. Но из предложения 22.5 следует, что $\operatorname{Ker} P^* = (\operatorname{Im} P)^\perp$ и $\operatorname{Im} P^* = (\operatorname{Ker} P)^\perp$. Таким образом, $P = P^*$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} P = (\operatorname{Im} P)^\perp$, как и требовалось. □

Определение 22.8. Оператор, удовлетворяющий условиям предложения 22.12, называется *ортогональным проектором.*

Соглашение 22.2. Как правило, когда говорят об операторах в гильбертовом пространстве, ортогональные проекторы называют просто проекторами. К путанице это не приводит.

Следующий класс операторов включает в себя все изометрии, коизометрии и ортогональные проекторы.

Предложение 22.13. *Пусть H — гильбертово пространство. Следующие свойства оператора $V \in \mathscr{B}(H)$ эквивалентны:*

(i) $VV^*V = V$*;*
(ii) V^*V *— проектор;*
(iii) *ограничение V на* $(\operatorname{Ker} V)^\perp$ *— изометрия.*

Доказательство. Упражнение. □

Определение 22.9. Оператор, удовлетворяющий условиям предложения 22.13, называется *частичной изометрией.*

Предложение 22.14. *Пусть V — частичная изометрия в гильбертовом пространстве H. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *Оператор V^* — частичная изометрия.*
(ii) *Положим $H_0 = (\operatorname{Ker} V)^\perp$ и $H_1 = \operatorname{Im} V$. Тогда операторы $V|_{H_0} \colon H_0 \to H_1$ и $V^*|_{H_1} \colon H_1 \to H_0$ — обратные друг другу изометрические изоморфизмы, V^*V — ортогональный проектор на H_0, а VV^* — ортогональный проектор на H_1.*

Доказательство. Упражнение. □

Определение 22.10. Пусть V — частичная изометрия в гильбертовом пространстве H. Проектор V^*V называется ее *начальным проектором*, а проектор VV^* — ее *конечным проектором.*

Перейдем теперь к обсуждению спектров введенных выше операторов.

Предложение 22.15. *Пусть A — унитальная алгебра, $p \in A$, $p^2 = p$, причем $p \neq 0$ и $p \neq 1_A$. Тогда $\sigma(p) = \{0, 1\}$. В частности, спектр любого проектора в гильбертовом пространстве, отличного от* 0 *и* $\mathbf{1}$, *равен* $\{0, 1\}$.

Доказательство. Упражнение. □

Предложение 22.16. *Пусть H — гильбертово пространство и $U \in \mathscr{B}(H)$ — унитарный оператор. Тогда $\sigma(U) \subseteq \mathbb{T}$.*

Доказательство. Если $\lambda \in \sigma(U)$, то $|\lambda| \leqslant \|U\| = 1$ (см. теорему 15.5 (ii)). С другой стороны, $\lambda^{-1} \in \sigma(U^{-1})$ (см. следствие 14.11), а оператор U^{-1}, очевидно, также унитарен. По только что доказанному, $|\lambda^{-1}| \leqslant 1$, т.е. $|\lambda| \geqslant 1$. Отсюда окончательно получаем $|\lambda| = 1$, как и требовалось. □

Предложение 22.17. *Пусть H — гильбертово пространство и $T \in \mathscr{B}(H)$ — самосопряженный оператор. Тогда $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $\alpha = \operatorname{Re}\lambda$, $\beta = \operatorname{Im}\lambda$, причем $\beta \neq 0$. Тогда $T - \lambda\mathbf{1} = (T - \alpha\mathbf{1}) - i\beta\mathbf{1}$, причем оператор $T - \alpha\mathbf{1}$ самосопряжен. Заменяя T на $T - \alpha\mathbf{1}$, мы видим, что нам остается доказать обратимость оператора $T - i\beta\mathbf{1}$ для любого $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Для любого $x \in H$ с учетом самосопряженности T имеем

$$\|(T - i\beta\mathbf{1})x\|^2 = \langle Tx - i\beta x, Tx - i\beta x\rangle = \|Tx\|^2 + \beta^2\|x\|^2 \geqslant \beta^2\|x\|^2.$$

Аналогично устанавливается оценка $\|(T + \beta\mathbf{1})x\|^2 \geqslant \beta^2\|x\|^2$. Следовательно, операторы $T \pm i\beta\mathbf{1}$ топологически инъективны. Но эти операторы сопряжены друг другу, поэтому, применяя предложение 22.5 (iv), заключаем, что они оба сюръективны, а значит, обратимы. □

Следствие 22.18. *Остаточный спектр самосопряженного оператора пуст.*

Доказательство. Пусть T — самосопряженный оператор и $\lambda \in \sigma_r(T)$. Из предложений 22.6 (iv) и 22.17 следует, что $\lambda \in \sigma_p(T)$. Противоречие. □

Следствие 22.19. *Пусть H — гильбертово пространство и $T \in \mathscr{B}(H)$ — самосопряженный оператор. Тогда $r(T) = \|T\|$.*

Доказательство. Применяя C^*-тождество, получаем равенства $\|T^2\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$. Отсюда по индукции легко следует, что $\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. С учетом формулы Бёрлинга (16.1) это дает равенства

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|T^{2^n}\|^{1/2^n} = \|T\|. \qquad \square$$

С учетом того, что спектр самосопряженного оператора содержится в $\mathbb{R}$, следствие 22.19 можно переформулировать следующим образом.

Следствие 22.20. *Пусть H — гильбертово пространство и $T \in \mathscr{B}(H)$ — самосопряженный оператор. Тогда $\sigma(T) \subseteq [-\|T\|, \|T\|]$, причем хотя бы один из концов этого отрезка принадлежит $\sigma(T)$.*

Следствие 22.21. *Собственные векторы самосопряженного оператора, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство. Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — самосопряженный оператор, $x, y \in H$, $Tx = \lambda x$, $Ty = \mu y$, причем $\lambda \neq \mu$. В силу предложения 22.17, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\langle\lambda x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \mu\langle x, y\rangle.$$

Отсюда получаем $\langle x, y\rangle = 0$, как и требовалось. □

В заключение сделаем несложное, но полезное наблюдение об инвариантных подпространствах операторов в гильбертовом пространстве.

Предложение 22.22. *Пусть H — гильбертово пространство и $T \in \mathscr{B}(H)$. Замкнутое векторное подпространство $H_0 \subseteq H$ T-инвариантно тогда и только тогда, когда $H_0^\perp$ T^*-инвариантно.*

Доказательство. Включение $T(H_0) \subseteq H_0 = H_0^{\perp\perp}$ означает в точности, что $\langle Tx, y\rangle = 0$ для всех $x \in H_0$ и всех $y \in H_0$. Это равносильно тому, что $\langle x, T^*y\rangle = 0$ для тех же x и y, а это и означает, что $T^*(H_0^\perp) \subseteq H_0^\perp$. $\square$

Следствие 22.23. *Пусть H — гильбертово пространство и $T \in \mathscr{B}(H)$ — самосопряженный оператор. Замкнутое векторное подпространство $H_0 \subseteq H$ T-инвариантно тогда и только тогда, когда $H_0^\perp$ T-инвариантно.*