А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 21

21.1. Фредгольмовы операторы (продолжение)

Теперь, когда в нашем расположении есть теория Рисса–Шаудера, мы можем вернуться к изучению фредгольмовых операторов и доказать несколько их важных свойств. Начнем с алгебраической подготовки.

Определение 21.1. Пусть X, Y — векторные пространства и $T\colon X \to Y$ — линейный оператор. Будем говорить, что линейный оператор $S\colon Y \to X$ *расщепляет* T, если $TST = T$.

Следующая лемма проясняет геометрический смысл этого определения.

Лемма 21.1. *Пусть X, Y — векторные пространства, $T\colon X \to Y$ и $S\colon Y \to X$ — линейные операторы. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *$TST = T$;*
(ii) *существует такое разложение $X = \operatorname{Ker} T \oplus X_0$, что*

$$S|_{\operatorname{Im} T} = (T|_{X_0}\colon X_0 \to \operatorname{Im} T)^{-1}. \tag{21.1}$$

Если выполнены условия (i) *и* (ii), *то ST и TS — проекторы, причем $\operatorname{Ker} ST = \operatorname{Ker} T$ и $\operatorname{Im} TS = \operatorname{Im} T$.*

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Умножая равенство (i) на S слева, а затем на T справа, убеждаемся, что ST и TS — проекторы. Очевидно, $\operatorname{Ker} ST \supseteq \operatorname{Ker} T$ и $\operatorname{Im} TS \subseteq \operatorname{Im} T$, а из равенства (i) следуют противоположные включения. Положим теперь $X_0 = \operatorname{Im} ST$. Учитывая, что ST — проектор, получаем разложение

$$X = \operatorname{Ker} ST \oplus \operatorname{Im} ST = \operatorname{Ker} T \oplus X_0.$$

Рассмотрим теперь операторы

$$T' = (T|_{X_0}\colon X_0 \to \operatorname{Im} T), \quad S' = (S|_{\operatorname{Im} T}\colon \operatorname{Im} T \to X_0).$$

Очевидно, T' биективен, и из (i) следует, что $T'S'T' = T'$. Отсюда получаем требуемое равенство $S' = (T')^{-1}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Из (21.1) следует, что оператор ST тождествен на X_0, поэтому операторы TST и T совпадают на X_0. Поскольку подпространство $\operatorname{Ker} T$ они оба переводят в ноль, из (ii) заключаем, что $TST = T$. □

Теорема 21.2 (С. М. Никольский, Ф. Аткинсон)**.** *Пусть X и Y — банаховы пространства. Следующие свойства ограниченного линейного оператора $T\colon X \to Y$ эквивалентны:*

(i) *T фредгольмов;*
(ii) *существует такой фредгольмов оператор $S\colon Y \to X$, что $TST = T$, и операторы $\mathbf{1}_X - ST$ и $\mathbf{1}_Y - TS$ — проекторы конечного ранга;*
(iii) *существует такой ограниченный линейный оператор $S\colon Y \to X$, что $ST \in \mathbf{1}_X + \mathscr{K}(X)$ и $TS \in \mathbf{1}_Y + \mathscr{K}(Y)$;*
(iv) *существуют такие ограниченные линейные операторы $S_1, S_2\colon Y \to X$, что $S_1T \in \mathbf{1}_X + \mathscr{K}(X)$ и $TS_2 \in \mathbf{1}_Y + \mathscr{K}(Y)$.*

Кроме того, справедливы следующие утверждения:

(a) *если T фредгольмов и $\operatorname{ind} T = 0$, то оператор S из п.* (ii) *можно выбрать так, что он будет топологическим изоморфизмом;*
(b) *если операторы S_1, S_2 таковы, как в* (iv), *то*

$$S_1 - S_2 \in \mathscr{K}(Y, X), \quad S_2T \in \mathbf{1}_X + \mathscr{K}(X), \quad TS_1 \in \mathbf{1}_Y + \mathscr{K}(Y).$$

Кроме того, S_1 и S_2 фредгольмовы, и $\operatorname{ind} S_1 = \operatorname{ind} S_2 = -\operatorname{ind} T$.

Определение 21.2. Оператор S из п. (iii) теоремы 21.2 называется *существенно обратным* к T, а операторы S_1 и S_2 из п. (iv) — соответственно, *левым существенно обратным* и *правым существенно обратным* к T.

Замечание 21.1. В теории операторов прилагательное «существенно» обычно добавляют в ситуациях, когда некоторое свойство оператора выполняется по модулю компактных операторов. В дальнейшем мы еще встретимся с этой терминологией (см. ниже определение 21.4).

Таким образом, эквивалентность (i) $\iff$ (iii) в теореме 21.2 означает, что оператор фредгольмов тогда и только тогда, когда он существенно обратим. Эквивалентность (iii) $\iff$ (iv) означает, что для существенной обратимости оператора достаточно его существенной обратимости слева и справа. Наконец, утверждение (b) теоремы 21.2 означает, что и левый, и правый существенно обратные к T операторы являются существенно обратными к T, существенно обратный оператор определен однозначно по модулю компактных операторов, существенно обратный оператор фредгольмов, и его индекс равен $-\operatorname{ind} T$.

Доказательство теоремы 21.2. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Поскольку T фредгольмов, его ядро и образ — дополняемые подпространства в X и Y соответственно (см. предложения 12.18 и 12.19). Выберем замкнутые подпространства $X_0 \subseteq X$ и $Y_0 \subseteq Y$ так, чтобы

$$X = \operatorname{Ker} T \oplus_{\mathrm{top}} X_0, \quad Y = \operatorname{Im} T \oplus_{\mathrm{top}} Y_0. \tag{21.2}$$

Определим линейный оператор $S\colon Y \to X$ следующим образом:

$$\begin{gathered} S|_{\operatorname{Im} T} = (T|_{X_0}\colon X_0 \to \operatorname{Im} T)^{-1}, \\ S|_{Y_0}\colon Y_0 \to X \text{ — произвольный линейный оператор.} \end{gathered} \tag{21.3}$$

Из теоремы Банаха 12.5 следует, что $S|_{\operatorname{Im} T}$ ограничен, а из конечномерности Y_0 следует, что $S|_{Y_0}$ ограничен. Вспоминая, что $Y = \operatorname{Im} T \oplus_{\mathrm{top}} Y_0$, заключаем, что S ограничен.

Чтобы доказать фредгольмовость S, заметим, что $\operatorname{Ker} S \cap \operatorname{Im} T = 0$. Поскольку $\operatorname{codim}_Y \operatorname{Im} T < \infty$, отсюда следует, что $\dim \operatorname{Ker} S < \infty$. С другой стороны, $\operatorname{Im} S \supseteq X_0$ и $\operatorname{codim}_X X_0 = \dim \operatorname{Ker} T < \infty$. Следовательно, $\operatorname{codim}_X \operatorname{Im} S < \infty$ и S фредгольмов. Применяя теперь лемму 21.1, заключаем, что $TST = T$, и операторы ST и TS — проекторы. Следовательно, $\mathbf{1}_X - ST$ и $\mathbf{1}_Y - TS$ — также проекторы, причем

$$\operatorname{Im}(\mathbf{1}_X - ST) = \operatorname{Ker} ST = \operatorname{Ker} T,$$
$$\operatorname{Im}(\mathbf{1}_Y - TS) = \operatorname{Ker} TS \cong \operatorname{Coker} TS = \operatorname{Coker} T.$$

Следовательно, образы проекторов $\mathbf{1}_X - ST$ и $\mathbf{1}_Y - TS$ конечномерны, как и требовалось. Тем самым (ii) доказано.

Докажем теперь утверждение (a). Предположим, что $\operatorname{ind} T = 0$. Тогда из (21.2) следует, что $\dim Y_0 = \dim \operatorname{Ker} T$, поэтому при построении оператора S можно задать его на Y_0 так, чтобы он был изоморфизмом между Y_0 и $\operatorname{Ker} T$ (см. (21.3)). Получившийся в результате оператор S осуществляет топологический изоморфизм между соответствующими прямыми слагаемыми разложений (21.2) и является поэтому топологическим изоморфизмом между Y и X.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv): очевидно.

(iv) $\Longrightarrow$ (i). По предположению,

$$S_1 T = \mathbf{1}_X + K_1, \quad \text{где } K_1 \in \mathscr{K}(X). \tag{21.4}$$

Отсюда получаем включение $\operatorname{Ker} T \subseteq \operatorname{Ker}(\mathbf{1}_X + K_1)$. Но $\operatorname{Ker}(\mathbf{1}_X + K_1)$ конечномерно в силу теоремы Рисса–Шаудера 20.2. Следовательно, таково же и $\operatorname{Ker} T$.

С другой стороны,

$$TS_2 = \mathbf{1}_Y + K_2, \quad \text{где } K_2 \in \mathscr{K}(Y). \tag{21.5}$$

Отсюда получаем включение $\operatorname{Im} T \supseteq \operatorname{Im}(\mathbf{1}_Y + K_2)$. Но $\operatorname{Im}(\mathbf{1}_Y + K_2)$ имеет конечную коразмерность в Y в силу теоремы Рисса–Шаудера 20.2. Следовательно, то же самое верно и для $\operatorname{Im} T$. Таким образом, оператор T фредгольмов, и (i) доказано.

Для завершения доказательства остается доказать утверждение (b). Умножая равенство (21.4) справа на S_2, а равенство (21.5) слева на S_1, заключаем, что $S_1 T S_2 = S_2 + K_1 S_2 = S_1 + S_1 K_2$. Следовательно, $S_1 - S_2 = K_1 S_2 - S_1 K_2 \in \mathscr{K}(Y, X)$. Но тогда

$$S_2 T + \mathscr{K}(X) = S_1 T + \mathscr{K}(X) = \mathbf{1}_X + \mathscr{K}(X),$$
$$TS_1 + \mathscr{K}(Y) = TS_2 + \mathscr{K}(Y) = \mathbf{1}_Y + \mathscr{K}(Y).$$

Таким образом, оператор T является существенно обратным как для S_1, так и для S_2. С учетом уже доказанной эквивалентности (i) $\iff$ (iii) заключаем, что S_1 и S_2 фредгольмовы. Наконец, приравнивая индексы операторов в равенствах (21.4) и (21.5) и применяя теорему Рисса–Шаудера 20.2, получаем

$$\operatorname{ind} S_1 + \operatorname{ind} T = \operatorname{ind}(\mathbf{1}_X + K_1) = 0, \quad \operatorname{ind} T + \operatorname{ind} S_2 = \operatorname{ind}(\mathbf{1}_Y + K_2) = 0.$$

Следовательно, $\operatorname{ind} S_1 = \operatorname{ind} S_2 = -\operatorname{ind} T$, как и требовалось. □

Для операторов, действующих в каком-то одном банаховом пространстве X, часть (iii) теоремы 21.2 можно переформулировать в более элегантном виде. Напомним (см. следствие 18.12), что множество компактных операторов $\mathscr{K}(X)$ — замкнутый двусторонний идеал в $\mathscr{B}(X)$.

Определение 21.3. Факторалгебра $\mathcal{Q}(X) = \mathscr{B}(X)/\mathscr{K}(X)$ называется *алгеброй Калкина* банахова пространства X.

Из задачи 12.3 (см. листок 12) следует, что $\mathcal{Q}(X)$ — банахова алгебра. Отметим, что $\mathcal{Q}(X) \neq 0$, если X бесконечномерно (см. предложение 18.10 (iv)).

Следствие 21.3. *Пусть X — банахово пространство. Оператор $T \in \mathscr{B}(X)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда $T + \mathscr{K}(X)$ обратим в $\mathcal{Q}(X)$.*

Доказательство. Это просто переформулировка утверждения (iii) теоремы 21.2. □

Замечание 21.2. Обратите внимание, что лемма 14.7 в применении к алгебре $\mathcal{Q}(X)$ сразу дает первую половину утверждения (b) теоремы 21.2 (для случая $Y = X$).

Алгебра Калкина играет важную роль в теории расширений операторных алгебр и в операторной K-теории. Об этих науках, тесно связанных с топологией, можно прочитать в книгах B. Blackadar, “K-theory for operator algebras” (Cambridge, 1998) и N. Higson, J. Roe, “Analytic K-homology” (Oxford, 2000). Для наших целей алгебра Калкина удобна потому, что с ее помощью можно определить еще одну часть спектра линейного оператора.

Определение 21.4. Пусть X — банахово пространство. *Существенным спектром* оператора $T \in \mathscr{B}(X)$ называется множество

$$\sigma_{\text{ess}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \mathbf{1} \text{ не фредгольмов } \}.$$

Следствие 21.4. *Для любого $T \in \mathscr{B}(X)$ справедливо равенство*

$$\sigma_{\text{ess}}(T) = \sigma_{\mathcal{Q}(X)}(T + \mathscr{K}(X)).$$

Комбинируя это следствие с теоремами 15.5 и 15.9, получаем следующий результат.

Следствие 21.5. *Существенный спектр любого ограниченного линейного оператора в бесконечномерном банаховом пространстве компактен и непуст.*

В дальнейшем множество фредгольмовых операторов из банахова пространства X в банахово пространство Y будет обозначаться через $\mathscr{F}\mathrm{red}(X, Y)$. Мы также полагаем $\mathscr{F}\mathrm{red}(X) = \mathscr{F}\mathrm{red}(X, X)$.

Наблюдение 21.6. Пусть $\pi \colon \mathscr{B}(X) \to \mathcal{Q}(X)$ — факторотображение. Следствие 21.3 означает, что

$$\mathscr{F}\mathrm{red}(X) = \pi^{-1}(\mathcal{Q}(X)^\times). \tag{21.6}$$

Поскольку множество обратимых элементов $\mathcal{Q}(X)^\times$ открыто в $\mathcal{Q}(X)$ (см. теорему 15.3), из (21.6) следует, что $\mathscr{F}\mathrm{red}(X)$ — открытое подмножество в $\mathscr{B}(X)$. Следующая теорема усиливает это наблюдение.

Теорема 21.7. *Пусть X и Y — банаховы пространства. Множество $\mathscr{F}\mathrm{red}(X, Y)$ открыто в $\mathscr{B}(X, Y)$, и функция $\mathrm{ind} \colon \mathscr{F}\mathrm{red}(X, Y) \to \mathbb{Z}$ локально постоянна.*

Доказательство теоремы сводится к следующей лемме.

Лемма 21.8. *Пусть X и Y — банаховы пространства, $T\colon X \to Y$ — фредгольмов оператор. Зафиксируем оператор $S \in \mathscr{B}(Y,X)$, расщепляющий T и существенно обратный к T. Тогда для любого оператора $R \in \mathscr{B}(X,Y)$, удовлетворяющего условию $\|R\| < \|S\|^{-1}$, оператор $T+R$ фредгольмов, и* $\operatorname{ind}(T+R) = \operatorname{ind} T$.

Доказательство. Поскольку $ST \in \mathbf{1}_X + \mathscr{K}(X)$, имеем включение

$$S(T+R) \in \mathbf{1}_X + SR + \mathscr{K}(X). \tag{21.7}$$

Заметим, что $\|SR\| \leqslant \|S\|\|R\| < 1$. Применяя теорему 15.3, заключаем, что оператор $\mathbf{1}_X + SR$ обратим. Полагая $S_1 = (\mathbf{1}_X + SR)^{-1}$, из (21.7) получаем включение

$$S_1 S(T+R) \in \mathbf{1}_X + \mathscr{K}(X). \tag{21.8}$$

Аналогичным образом строится оператор $S_2 \in \mathscr{B}(Y)$, для которого

$$(T+R)SS_2 \in \mathbf{1}_Y + \mathscr{K}(Y). \tag{21.9}$$

Из соотношений (21.8) и (21.9) и из теоремы 21.2 заключаем, что оператор $T+R$ фредгольмов. Заметим теперь, что

$$TS(T+R) = TST + TSR = T + TSR = T(\mathbf{1}_X + SR).$$

Следовательно,

$$\operatorname{ind} T + \operatorname{ind} S + \operatorname{ind}(T+R) = \operatorname{ind} T + \operatorname{ind}(\mathbf{1}_X + SR).$$

Но $\operatorname{ind} T + \operatorname{ind} S = 0$ в силу теоремы 21.2, а $\operatorname{ind}(\mathbf{1}_X + SR) = 0$, т.к. этот оператор обратим (см. выше). Следовательно, $\operatorname{ind}(T+R) = \operatorname{ind} T$, как и требовалось. □

Теорема 21.7 показывает, что как свойство оператора быть фредгольмовым, так и его индекс устойчивы при малых (по норме) возмущениях. Покажем теперь, что они устойчивы и при компактных возмущениях.

Теорема 21.9. *Пусть X и Y — банаховы пространства, $T \in \mathscr{F}\mathrm{red}(X,Y)$ и $K \in \mathscr{K}(X,Y)$. Тогда $T+K \in \mathscr{F}\mathrm{red}(X,Y)$, и* $\operatorname{ind}(T+K) = \operatorname{ind} T$.

Доказательство. Пусть $S \in \mathscr{B}(Y,X)$ — оператор, существенно обратный к T, т.е.

$$ST = \mathbf{1}_X + K_1, \quad TS = \mathbf{1}_Y + K_2, \quad K_1 \in \mathscr{K}(X), \quad K_2 \in \mathscr{K}(Y).$$

Заменяя T на $T+K$, получаем

$$\begin{aligned} S(T+K) &= \mathbf{1}_X + K_1 + SK \in \mathbf{1}_X + \mathscr{K}(X),\\ (T+K)S &= \mathbf{1}_Y + K_2 + KS \in \mathbf{1}_Y + \mathscr{K}(Y). \end{aligned}$$

Применяя теорему 21.2, заключаем, что оператор $T+K$ фредгольмов, причем S — его существенно обратный. Следовательно, $\operatorname{ind}(T+K) = -\operatorname{ind} S = \operatorname{ind} T$. □

В заключение дадим одну полезную характеризацию фредгольмовых операторов с нулевым индексом.

Теорема 21.10 (С. М. Никольский)**.** *Пусть X и Y — банаховы пространства. Следующие свойства оператора $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ эквивалентны:*

(i) *T фредгольмов и* $\operatorname{ind} T = 0$*;*
(ii) *$T = R + K$, где $R\colon X \to Y$ — топологический изоморфизм и $K \in \mathscr{F}(X, Y)$;*
(iii) *$T = R + K$, где $R\colon X \to Y$ — топологический изоморфизм и $K \in \mathscr{K}(X, Y)$.*

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Из утверждения (a) теоремы 21.2 следует, что существует такой топологический изоморфизм $S\colon Y \to X$, что $ST = \mathbf{1}_X + K_1$, где $K_1 \in \mathscr{F}(X)$. Следовательно, $T = S^{-1} + S^{-1}K_1$ — искомое разложение оператора T.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): очевидно.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): следует из теоремы 21.9. □

21.2. Операторы Тёплица

Познакомимся теперь с одним интересным классов фредгольмовых операторов, имеющим ряд важных приложений в теории операторных алгебр, геометрии и топологии.

Напомним, что через $\mathbb{T}$ обозначается окружность $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, снабженная нормализованной (т.е. деленной на 2π) мерой Лебега. Стандартный ортонормированный базис в пространстве $L^2(\mathbb{T})$ образуют функции $e_n(z) = z^n$ ($n \in \mathbb{Z}$); см. пример 6.7.

Определение 21.5. *Пространство Харди* на $\mathbb{T}$ определяется следующим образом:

$$H^2(\mathbb{T}) = \overline{\operatorname{span}}\{e_n : n \geqslant 0\} = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \langle f, e_n\rangle = 0 \ \forall n < 0\}.$$

Очевидно, $H^2(\mathbb{T})$ — замкнутое векторное подпространство в $L^2(\mathbb{T})$.

Обозначим через P ортогональный проектор в $L^2(\mathbb{T})$ на $H^2(\mathbb{T})$. Он однозначно определен формулой

$$Pe_n = \begin{cases} e_n & \text{при } n \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } n < 0. \end{cases}$$

Для $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ через M_f будет обозначаться оператор умножения в $L^2(\mathbb{T})$, действующий по правилу $M_f(g) = fg$ (см. пример 2.5).

Определение 21.6. Пусть $f \in L^\infty(\mathbb{T})$. Оператор

$$T_f\colon H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T}), \quad T_f = PM_f|_{H^2(\mathbb{T})},$$

называется *оператором Тёплица с символом f*.

Наша ближайшая задача — выяснить, при каких условиях на f оператор Тёплица T_f фредгольмов, и вычислить его индекс.

Предложение 21.11. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *для любой $f \in C(\mathbb{T})$ оператор $[P, M_f]$ в $L^2(\mathbb{T})$ компактен;*
(ii) *для любых $f, g \in C(\mathbb{T})$ справедливо равенство $T_f T_g = T_{fg} \mod \mathscr{K}(H^2(\mathbb{T}))$.*

Доказательство. (i) Положим

$$A = \{f \in C(\mathbb{T}) : [P, M_f] \in \mathscr{K}(L^2(\mathbb{T}))\}.$$

Легко видеть, что A — замкнутое векторное подпространство в $C(\mathbb{T})$ (объясните, почему). Очевидно, функция $e_0 \equiv 1$ лежит в A. Если $f, g \in A$, то

$$[P, M_{fg}] = [P, M_f M_g] = [P, M_f]M_g + M_f[P, M_g] \in \mathscr{K}(L^2(\mathbb{T})).$$

Следовательно, A — замкнутая подалгебра в $C(\mathbb{T})$.

Прямая проверка (проведите ее) показывает, что

$$[P, M_{e_1}](e_i) = \begin{cases} e_0 & \text{при } i = -1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следовательно, $e_1 \in A$. Аналогично проверяется, что и $e_{-1} \in A$ (убедитесь)! Таким образом, A — замкнутая подалгебра в $C(\mathbb{T})$, содержащая все лорановские многочлены. Из теоремы Вейерштрасса следует, что $A = C(\mathbb{T})$, как и требовалось.

(ii) С учетом (i) получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} T_f T_g = PM_f PM_g &= PPM_f M_g \mod \mathscr{K}(H^2(\mathbb{T})) \\ &= PM_{fg} \mod \mathscr{K}(H^2(\mathbb{T})) = T_{fg} \mod \mathscr{K}(H^2(\mathbb{T})). \end{aligned}$$ □

Следствие 21.12. *Отображение*

$$C(\mathbb{T}) \to \mathscr{Q}(H^2(\mathbb{T})), \quad f \mapsto T_f + \mathscr{K}(H^2(\mathbb{T})),$$

— гомоморфизм банаховых алгебр.

Для непрерывной функции $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ обозначим через $[f]$ ее класс в фундаментальной группе $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Напомним (см. курс топологии), что $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ — бесконечная циклическая группа, порожденная элементом $e_1(z) = z$. Зафиксируем изоморфизм

$$\alpha\colon \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}, \quad [e_1] \mapsto 1.$$

Определение 21.7. Число $\mathrm{wn}(f) = \alpha([f])$ называется *числом оборотов*[1] функции $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ вокруг 0.

Число оборотов иногда называется *индексом* петли f относительно 0. Следующая теорема устанавливает красивую связь числа оборотов (индекса) петли с фредгольмовым индексом.

Теорема 21.13. *Для любой непрерывной функции $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ оператор Тёплица T_f фредгольмов, и* $\operatorname{ind} T_f = -\operatorname{wn}(f)$.

[1] По-английски winding number.

Доказательство. Поскольку f — обратимый элемент алгебры $C(\mathbb{T})$, из следствия 21.12 вытекает, что $T_f + \mathscr{K}(H^2(\mathbb{T}))$ — обратимый элемент алгебры $\mathcal{Q}(H^2(\mathbb{T}))$, т.е. T_f — фредгольмов оператор (см. следствие 21.3). В группе $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ имеет место равенство $[f] = [e_n]$, где $n = \operatorname{wn}(f)$. Иначе говоря, функции f и e_n можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в $C(\mathbb{T}, \mathbb{C} \setminus \{0\})$. Отсюда и из непрерывности отображения $f \mapsto T_f$ следует, что операторы T_f и T_{e_n} лежат в одной компоненте связности множества $\mathscr{F}\mathrm{red}(H^2(\mathbb{T}))$, а значит (см. теорему 21.7), имеют одинаковый индекс.

Для завершения доказательства рассмотрим операторы левого и правого сдвига

$$T_\ell, T_r \colon \ell^2(\mathbb{Z}_{\geqslant 0}) \to \ell^2(\mathbb{Z}_{\geqslant 0}).$$

Легко видеть, что

$$T_{e_n} \cong \begin{cases} T_r^n & \text{при } n \geqslant 0, \\ T_\ell^{-n} & \text{при } n < 0, \end{cases}$$

где символ $\cong$ означает унитарную эквивалентность. Следовательно,

$$\operatorname{ind} T_f = \operatorname{ind} T_{e_n} = -n. \qquad \square$$

У доказанных выше результатов есть содержательные многомерные аналоги, связанные с различными тонкими вопросами анализа, геометрии и топологии. См. по этому поводу L. Boutet de Monvel, V. Guillemin, “The spectral theory of Toeplitz operators” (Princeton, 1981), L. Boutet de Monvel, “On the index of Toeplitz operators of several complex variables” (Invent. Math. 50 (1979), 249–272), P. Baum, R. G. Douglas, “Toeplitz operators and Poincaré duality” (Operator Theory: Adv. Appl., 4, Birkhäuser, 1982).