А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 20

20.1. Теория Рисса–Шаудера

Теория Рисса–Шаудера, о которой пойдет речь ниже, занимает центральное место в теории компактных операторов. На ней основано большинство приложений компактных операторов — как в самом функциональном анализе, так и в других областях математики.

Начнем с некоторых алгебраических определений. Пусть X — векторное пространство и T — линейный оператор в X. Для каждого целого $n \geqslant 0$ положим $K_n = \operatorname{Ker} T^n$ и $I_n = \operatorname{Im} T^n$. Получим две цепочки подпространств

$$0 = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots, \quad X = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots.$$

Может случиться, что какая-то из этих цепочек стабилизируется. В такой ситуации используют следующую терминологию.

Определение 20.1. *Подъемом* линейного оператора $T \colon X \to X$ называется число

$$a(T) = \min\{n \geqslant 0 : K_n = K_{n+i} \ \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Если таких n не существует, то полагают $a(T) = \infty$.

Спуском линейного оператора $T \colon X \to X$ называется число[1]

$$d(T) = \min\{n \geqslant 0 : I_n = I_{n+i} \ \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Если таких n не существует, то полагают $d(T) = \infty$.

Лемма 20.1. *Для любого линейного оператора $T \colon X \to X$ справедливы следующие утверждения:*

(i) *Если $K_n = K_{n+1}$ для некоторого n, то $K_n = K_{n+i}$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и, как следствие, $a(T) < \infty$.*
(ii) *Если $I_n = I_{n+1}$ для некоторого n, то $I_n = I_{n+i}$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и, как следствие, $d(T) < \infty$.*
(iii) *Если $a(T) < \infty$ и $d(T) < \infty$, то $a(T) = d(T)$.*

Доказательство. (i), (ii): упражнения.

(iii) Докажем, что $d(T) \leqslant a(T)$. Для этого достаточно установить, что если для некоторого n выполняются равенства $K_n = K_{n+1}$ и $I_{n+1} = I_{n+2}$, то $I_n = I_{n+1}$. Возьмем $x \in I_n$ и запишем его в виде $x = T^n y$, где $y \in X$. Имеем $Tx = T^{n+1} y \in I_{n+1} = I_{n+2}$. Следовательно, $T^{n+1} y = T^{n+2} z$ для некоторого $z \in X$. Отсюда получаем, что $y - Tz \in K_{n+1} = K_n$, т.е. $x = T^n y = T^{n+1} z \in I_{n+1}$, как и требовалось.

Неравенство $a(T) \leqslant d(T)$ устанавливается аналогично (докажите его сами в качестве упражнения). □

[1] Обозначения $a(T)$ и $d(T)$ происходят от английских слов ascent (подъем) и descent (спуск).

Теорема 20.2 (Рисс, Шаудер). *Пусть X — банахово пространство и $T\colon X \to X$ — линейный оператор, причем $T \in \mathbf{1}_X + \mathscr{K}(X)$. Справедливы следующие утверждения:*

(i) (абстрактная теорема Фредгольма). *Оператор T фредгольмов и* $\operatorname{ind} T = 0$.

(ii) *Оператор T имеет конечный подъем и конечный спуск.*

(iii) (разложение Рисса). *Положим $p = a(T) = d(T)$, $K_p = \operatorname{Ker} T^p$ и $I_p = \operatorname{Im} T^p$. Пространства K_p и I_p замкнуты и T-инвариантны, $X = K_p \oplus I_p$, оператор $T|_{K_p}\colon K_p \to K_p$ нильпотентен, а оператор $T|_{I_p}\colon I_p \to I_p$ — топологический изоморфизм.*

Доказательство. Представим оператор T в виде $T = \mathbf{1}_X - S$, где $S \in \mathscr{K}(X)$. Доказательство будет удобно разбить на несколько лемм.

Лемма 20.3. *Оператор T имеет конечномерное ядро и замкнутый образ.*

Доказательство. Положим $K = \operatorname{Ker} T$. Тогда $S|_K = \mathbf{1}_K$, и из компактности $S|_K$ и предложения 18.10 (iv) следует, что $\dim K < \infty$.

Рассмотрим теперь оператор $\widehat{T}\colon X/K \to X$, $\widehat{T}(x+K) = Tx$. Замкнутость подпространства $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} \widehat{T}$ равносильна тому, что $\widehat{T}$ топологически инъективен (см. теорему 12.6). Предположим, что это не так; тогда существует такая последовательность (x_n) в X, что $\|x_n + K\| = 1$ для всех n, и $Tx_n \to 0$ при $n \to \infty$, т.е.

$$x_n - Sx_n \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{20.1}$$

Поскольку оператор S компактен, мы можем (переходя, если нужно, к подпоследовательности) считать, что последовательность (Sx_n) сходится. Из (20.1) заключаем, что тогда и (x_n) сходится. Положим $x = \lim_n x_n$; тогда из (20.1) следует, что $x - Sx = 0$, т.е. $x \in K$. Но это невозможно, т.к. $\rho(x_n, K) = \|x_n + K\| = 1$ для всех n. □

Лемма 20.4. *Оператор T фредгольмов.*

Доказательство. С учетом леммы 20.3 нам осталось доказать, что T имеет конечномерное коядро. Поскольку $\operatorname{Im} T$ замкнут, имеем изоморфизм $(\operatorname{Coker} T)^* \cong \operatorname{Ker} T^*$ (см. теорему 13.13). Но $T^* \in \mathbf{1}_{X^*} + \mathscr{K}(X^*)$ в силу теоремы 18.11 (iii), поэтому $\operatorname{Ker} T^*$ конечномерно по лемме 20.3, а значит, таково же и $\operatorname{Coker} T$ (см. факт (b) в доказательстве предложения 19.5). □

Следствие 20.5. *Для каждого $k \in \mathbb{N}$ оператор T^k фредгольмов и, в частности, имеет замкнутый образ.*

Доказательство. Следует из леммы 20.4 с учетом теоремы 19.6 и следствия 19.4. □

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $K_n = \operatorname{Ker} T^n$ и $I_n = \operatorname{Im} T^n$.

Лемма 20.6. *Оператор T имеет конечный подъем.*

Доказательство. Если $a(T) = \infty$, то $K_n \neq K_{n+1}$ для всех n (см. лемму 20.1). Пусть $x_n \in K_{n+1}$ — $1/2$-перпендикуляр к K_n (см. лемму 18.3). Для всех $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, имеем

$$\|Sx_n - Sx_m\| = \|x_n - (Tx_n + x_m - Tx_m)\|.$$

Легко видеть, что векторы Tx_n, x_m и Tx_m лежат в K_n, поэтому $\|Sx_n - Sx_m\| \geqslant 1/2$. Но это невозможно ввиду компактности оператора S. Полученное противоречие показывает, что $a(T) < \infty$, как и требовалось. $\square$

Лемма 20.7. *Оператор T имеет конечный спуск.*

Доказательство. Применяя лемму 20.6 к оператору T^*, получаем, что $\operatorname{Ker}(T^*)^n = \operatorname{Ker}(T^*)^{n+1}$ для некоторого n. Пользуясь равенством $(T^*)^k = (T^k)^*$, применяя следствие 20.5 и предложение 13.8 (ii), получаем равенства

$$\operatorname{Im} T^n = \overline{\operatorname{Im} T^n} = {}^\perp\big(\operatorname{Ker}(T^n)^*\big) = {}^\perp\big(\operatorname{Ker}(T^{n+1})^*\big) = \overline{\operatorname{Im} T^{n+1}} = \operatorname{Im} T^{n+1}.$$

Следовательно, $d(T) < \infty$, как и требовалось. $\square$

Из лемм 20.6, 20.7 и 20.1 заключаем, что $p = a(T) = d(T) < \infty$.

Лемма 20.8. *Имеет место равенство* $\operatorname{ind} T = 0$.

Доказательство. Мы уже знаем, что операторы T^p и T^{p+1} фредгольмовы, $K_p = K_{p+1}$ и $I_p = I_{p+1}$. Следовательно, $\operatorname{ind} T^p = \operatorname{ind} T^{p+1}$. Применяя теорему 19.6, заключаем, что $p \cdot \operatorname{ind} T = (p+1) \cdot \operatorname{ind} T$, откуда и следует требуемое равенство $\operatorname{ind} T = 0$. $\square$

Для завершения доказательства теоремы осталось доказать утверждение (iii). Замкнутость K_p очевидна, а замкнутость I_p уже была доказана выше (следствие 20.5). Также очевидно, что K_p и I_p T-инвариантны и $T|_{K_p}$ — нильпотентный оператор. Докажем равенство $X = K_p \oplus I_p$. Пусть $x \in K_p \cap I_p$; тогда $T^p x = 0$ и $x = T^p y$ для некоторого $y \in X$. Отсюда получаем, что $T^{2p} y = T^p x = 0$, т.е. $y \in K_{2p}$. Но $K_{2p} = K_p$, поэтому $x = T^p y = 0$. Таким образом, $K_p \cap I_p = 0$. Но оператор T^p, так же как и T, фредгольмов и имеет нулевой индекс. Отсюда с учетом равенства $K_p \cap I_p = 0$ следует, что $K_p \oplus I_p = X$.

Заметим, наконец, что $T(I_p) = I_{p+1} = I_p$, т.е. оператор $T|_{I_p} \colon I_p \to I_p$ сюръективен. Но $K_p \cap I_p = 0$ и $K \subseteq K_p$, поэтому тем более $K \cap I_p = 0$, т.е. оператор $T|_{I_p} \colon I_p \to I_p$ инъективен. Применяя теорему Банаха 12.5, заключаем, что $T|_{I_p} \colon I_p \to I_p$ — топологический изоморфизм. Теорема доказана. $\square$

Следствие 20.9 (альтернатива Фредгольма)**.** *Пусть X — банахово пространство, $T \colon X \to X$ — линейный оператор, причем $T \in \mathbf{1}_X + \mathscr{K}(X)$. Оператор T сюръективен тогда и только тогда, когда он инъективен.*

С учетом предложения 19.5 (ii) равенство $\operatorname{ind} T = 0$ из теоремы Рисса–Шаудера можно переформулировать следующим образом.

Следствие 20.10. *Пусть X — банахово пространство, $T \colon X \to X$ — линейный оператор, причем $T \in \mathbf{1}_X + \mathscr{K}(X)$. Тогда* $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Ker} T^* < \infty$.

В качестве еще одного важного следствия из теоремы Рисса–Шаудера мы получаем следующий результат о спектре компактного оператора. Напомним, что *кратностью* собственного значения λ линейного оператора $T \colon X \to X$ называется размерность собственного подпространства $\operatorname{Ker}(T - \lambda \mathbf{1}_X)$.

Теорема 20.11. *Пусть X — банахово пространство и $T \colon X \to X$ — компактный оператор. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *если* $\lambda \in \sigma(T)$ *и* $\lambda \neq 0$, *то* λ *— собственное значение конечной кратности и изолированная точка спектра* $\sigma(T)$;

(ii) $\sigma(T)$ *не более чем счетен.*

Доказательству предпошлем следующую простую лемму.

Лемма 20.12. *Пусть* X *— банахово пространство,* $T\colon X \to X$ *— ограниченный линейный оператор. Предположим, что* $X = X_0 \oplus X_1$, *где* X_0 *и* X_1 *— замкнутые* T*-инвариантные подпространства в* X. *Тогда* $\sigma(T) = \sigma(T|_{X_0}) \cup \sigma(T|_{X_1})$.

Доказательство. Очевидно, T биективен тогда и только тогда, когда он биективно отображает X_0 на X_0, а X_1 — на X_1. Остается заменить T на $T - \lambda\mathbf{1}$ и воспользоваться теоремой Банаха 12.5. □

Доказательство теоремы 20.11. Заметим, что $T-\lambda\mathbf{1} = -\lambda(\mathbf{1}-\lambda^{-1}T)$ для любого $\lambda \neq 0$. Поэтому к оператору $T - \lambda\mathbf{1}$ применимы теорема Рисса–Шаудера 20.2 и ее следствие — альтернатива Фредгольма 20.9. Из последней сразу следует, что если $\lambda \in \sigma(T)$ и $\lambda \neq 0$, то λ — собственное значение T, причем его кратность конечна в силу фредгольмовости оператора $T-\lambda\mathbf{1}$. Положим теперь $p = a(T-\lambda\mathbf{1}) = d(T-\lambda\mathbf{1})$ и рассмотрим разложение Рисса $X = K_p \oplus I_p$, где $K_p = \operatorname{Ker}(T - \lambda\mathbf{1})^p$ и $I_p = \operatorname{Im}(T - \lambda\mathbf{1})^p$ (см. теорему 20.2 (iii)). Подпространства K_p и I_p замкнуты и T-инвариантны, поэтому

$$\sigma(T) = \sigma(T|_{K_p}) \cup \sigma(T|_{I_p}) \tag{20.2}$$

в силу леммы 20.12. Поскольку оператор $(T - \lambda\mathbf{1})|_{K_p}$ нильпотентен и $K_p \neq 0$, мы имеем $\sigma((T - \lambda\mathbf{1})|_{K_p}) = \{0\}$ (см. следствие 16.3 или листок 11), что равносильно равенству $\sigma(T|_{K_p}) = \{\lambda\}$. С другой стороны, оператор $(T - \lambda\mathbf{1})|_{I_p}$ обратим, поэтому $\lambda \notin \sigma(T|_{I_p})$. Таким образом, равенство (20.2) приобретает вид

$$\sigma(T) = \sigma(T|_{I_p}) \sqcup \{\lambda\}.$$

Отсюда с учетом замкнутости $\sigma(T|_{I_p})$ следует, что λ — изолированная точка множества $\sigma(T)$. Тем самым утверждение (i) доказано.

Утверждение (ii) является непосредственным следствием утверждения (i). В самом деле, из (i) следует, что для каждого n множество

$$K_n = \sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geqslant 1/n\}$$

является компактом, все точки которого изолированы. Следовательно, K_n конечно и $\sigma(T) \setminus \{0\} = \bigcup_n K_n$ не более чем счетно. □

Замечание 20.1. Понятие компактного оператора ввел Ф. Рисс в 1913 г. для случая гильбертовых пространств. Первоначальное определение, однако, отличалось от определения 18.4 и было дано в терминах слабой сходимости (с которой мы познакомимся несколько позже). Тогда же Рисс доказал, что всякий компактный оператор в гильбертовом пространстве приближается операторами конечного ранга (предложение 19.1). Одним из главных достижений Рисса считается его основополагающая работа "Über lineare Funktionalgleichungen" (Acta Math. **41** (1918), 71–98; русский перевод — УМН, 1936, №1, 175–199), в которой впервые появилось определение 18.4, и в которой была доказана большая часть утверждений из изложенной выше теории Рисса–Шаудера.

Там же была доказана лемма 18.3 об ε-перпендикуляре и ее следствие 18.4 о некомпактности единичной сферы. Общего понятия банахова пространства в то время еще не существовало, и Рисс работал с пространством непрерывных функций $C[a,b]$, однако его работа написана таким образом, что все ключевые рассуждения в ней сохраняют силу для произвольных банаховых пространств.

Основной мотивировкой для Рисса было желание дать элегантное изложение теории интегральных уравнений Фредгольма (см. ниже), не опирающееся на довольно громоздкую теорию «функциональных определителей» Фредгольма. Единственное утверждение теории Фредгольма, которое Риссу не удалось поместить в контекст компактных операторов, — это теорема о связи между числом решений интегрального уравнения Фредгольма и его сопряженного уравнения (см. ниже часть III теоремы 20.14). Говоря современным языком, ему не удалось доказать равенство $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Ker} T^*$ (т.е. равенство $\operatorname{ind} T = 0$; см. следствие 20.10) для операторов вида «$\mathbf{1}+$ компактный». Это равенство, как мы видели выше, опирается на часть (iii) теоремы 18.11 о компактности сопряженного оператора. Оба эти утверждения были доказаны Ю. Шаудером в 1930 г.

Завершая этот экскурс в историю, отметим, что понятия фредгольмова индекса во времена Рисса и Шаудера еще не существовало, поэтому первоначальное доказательство равенства $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Ker} T^*$ (т.е. $\operatorname{ind} T = 0$) отличалось от приведенного выше. Остальные же шаги нашего доказательства — в сущности те же, что и у Рисса.

В качестве следствий теории Рисса–Шаудера получаем следующие теоремы И. Фредгольма об интегральных уравнениях.

Теорема 20.13. *Пусть (X,μ) — пространство с мерой, $K \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$ и $f \in L^2(X,\mu)$. Рассмотрим следующие уравнения в пространстве $L^2(X,\mu)$ относительно неизвестных функций φ и ψ:*

$$\varphi(x) - \int_X K(x,y)\varphi(y)\, d\mu(y) = f(x), \tag{20.3}$$

$$\varphi(x) - \int_X K(x,y)\varphi(y)\, d\mu(y) = 0, \tag{20.4}$$

$$\psi(x) - \int_X K(y,x)\psi(y)\, d\mu(y) = 0. \tag{20.5}$$

Справедливы следующие утверждения:

I. *Уравнение* (20.3) *разрешимо тогда и только тогда, когда для любого решения ψ уравнения* (20.5) *выполнено условие $\int_X f(x)\psi(x)\, d\mu(x) = 0$.*

II (альтернатива Фредгольма). *Если уравнение* (20.4) *имеет лишь тривиальное решение, то уравнение* (20.3) *имеет единственное решение для любой $f \in L^2(X,\mu)$. Если же уравнение* (20.4) *имеет нетривиальное решение, то уравнение* (20.3) *разрешимо не для всех $f \in L^2(X,\mu)$.*

III. *Уравнения* (20.4) *и* (20.5) *имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений.*

Доказательство. Пусть $S\colon L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$ — интегральный оператор Гильберта–Шмидта с ядром K (см. пример 2.7). Отождествим пространство $L^2(X,\mu)^*$ с $L^2(X,\mu)$ посредством стандартного изоморфизма из теоремы 8.7. При таком отождествлении сопряженный оператор S^* также окажется интегральным оператором Гильберта–Шмидта с ядром $K^*(x,y) = K(y,x)$ (см. листок 5). Положим $T = \mathbf{1} - S$. В результате уравнения (20.3)–(20.5) приобретут следующий вид:

$$T\varphi = f,$$
$$T\varphi = 0,$$
$$T^*\psi = 0.$$

Как было отмечено в примере 19.3, оператор S компактен. Следовательно, к оператору T применима теорема Рисса–Шаудера 20.2. В частности, $\operatorname{Im} T$ замкнут (см. следствие 19.4), откуда с учетом предложения 13.8 получаем равенство $\operatorname{Im} T = {}^{\perp}(\operatorname{Ker} T^*)$ (где символ $\perp$ обозначает аннулятор). Но последнее равенство — это и есть утверждение I доказываемой теоремы. Утверждения II и III получаются непосредственным применением следствий 20.9 и 20.10 соответственно. $\square$

В классической формулировке теорем Фредгольма речь идет не о пространстве $L^2(X,\mu)$, а о пространстве $C[a,b]$ непрерывных функций на отрезке. Сформулируем соответствующий результат.

Теорема 20.14 (классические теоремы Фредгольма). *Пусть $I = [a,b]$, $K \in C(I \times I)$ и $f \in C(I)$. Рассмотрим следующие уравнения в пространстве $C(I)$ относительно неизвестных функций φ и ψ:*

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x), \tag{20.6}$$

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy = 0, \tag{20.7}$$

$$\psi(x) - \int_a^b K(y,x)\psi(y)\,dy = 0. \tag{20.8}$$

Справедливы следующие утверждения:

I. *Уравнение* (20.6) *разрешимо тогда и только тогда, когда для любого решения ψ уравнения* (20.8) *выполнено условие $\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx = 0$.*

II (альтернатива Фредгольма). *Если уравнение* (20.7) *имеет лишь тривиальное решение, то уравнение* (20.6) *имеет единственное решение для любой $f \in C(I)$. Если же уравнение* (20.7) *имеет нетривиальное решение, то уравнение* (20.6) *разрешимо не для всех $f \in C(I)$.*

III. *Уравнения* (20.7) *и* (20.8) *имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений.*

В отличие от теоремы 20.13, теорема 20.14 формально не сводится лишь к теории Рисса–Шаудера, т.к. пространство, сопряженное к $C(I)$, — это не $C(I)$, а пространство мер $M(I)$ (см. теорему Рисса 10.13). Положение дел спасает следующая несложная лемма.

Лемма 20.15. *Если $\varphi \in L^2(I)$ и $K \in C(I \times I)$, то функция*

$$g(x) = \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy$$

непрерывна на I.

Докажите эту лемму сами в качестве упражнения.

Доказательство теоремы 20.14. Утверждение II доказывается по той же схеме, что и утверждение II теоремы 20.13. Чтобы доказать утверждения I и III, заметим, что в силу леммы 20.15 решение любого из уравнений (20.6)–(20.8) в пространстве $L^2(I)$ автоматически лежит в $C(I)$. В итоге утверждения I и III сводятся к соответствующим утверждениям теоремы 20.13. $\square$

Замечание 20.2. В заключение упомянем об одной проблеме, связанной с компактными операторами и решенной совсем недавно. Напомним, что для любого банахова пространства X пространство компактных операторов $\mathscr{K}(X)$ является замкнутым векторным подпространством в $\mathscr{B}(X)$, и что $\mathscr{K}(X) \neq \mathscr{B}(X)$, если X бесконечномерно (т.к. тождественный оператор $\mathbf{1}_X$ в этом случае некомпактен). Может ли $\mathscr{K}(X)$ иметь конечную коразмерность в $\mathscr{B}(X)$? Результат предложения 19.2 наводит на мысль, что вряд ли: если $X = \ell^p$ или c_0, то факторпространство $\mathscr{B}(X)/\mathscr{K}(X)$ содержит изоморфную копию пространства ℓ^∞/c_0, которое, как нетрудно проверить, бесконечномерно. Для многих других «классических» банаховых пространств X тоже нетрудно показать, что пространство $\mathscr{K}(X)$ имеет бесконечную коразмерность в $\mathscr{B}(X)$. Тем удивительнее результат С. Аргироса и Р. Хейдона, построивших в 2009 г. бесконечномерное банахово пространство X, в котором каждый ограниченный линейный оператор имеет вид $\lambda\mathbf{1}_X + K$, где λ — скаляр и K — компактный оператор (Acta Math. **206** (2011), no. 1, 1–54; preprint arXiv:0903.3921). Иначе говоря, коразмерность $\mathscr{K}(X)$ в $\mathscr{B}(X)$ равна единице. Кроме того, пространство Аргироса–Хейдона — это первый пример бесконечномерного банахова пространства, про которое известно, что каждый ограниченный линейный оператор в нем имеет нетривиальное собственное инвариантное подпространство, и первый пример бесконечномерного банахова пространства X, для которого $\mathscr{B}(X)$ сепарабельно.