А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 19

19.1. Компактные операторы (продолжение)

На прошлой лекции мы ввели понятие компактного линейного оператора между банаховыми пространствами и выяснили, что если ограниченный оператор приближается по норме операторами конечного ранга, то он компактен. Естественно поинтересоваться, верно ли обратное, т.е. всякий ли компактный оператор приближается операторами конечного ранга. Для операторов со значениями в гильбертовом пространстве ответ утвердителен:

Предложение 19.1. *Пусть X — банахово пространство и H — гильбертово пространство. Тогда $\overline{\mathscr{F}(X,H)} = \mathscr{K}(X,H)$. Иначе говоря, всякий компактный оператор из X в H аппроксимируется (по операторной норме) ограниченными операторами конечного ранга.*

Доказательство. Пусть $T \in \mathscr{K}(X,H)$ и $\varepsilon > 0$. Зафиксируем конечную $\varepsilon/2$-сеть $F \subset H$ для $T(\mathbb{B}_{1,X})$ и положим $H_0 = \operatorname{span}(F)$. Обозначим через $P \in \mathscr{B}(H)$ ортогональный проектор на H_0 (т.е. оператор, тождественный на H_0 и переводящий $H_0^\perp$ в 0). Легко видеть, что P ограничен и $\|P\| = 1$. Покажем, что $\|T - PT\| \leqslant \varepsilon$. Для этого зафиксируем произвольный $x \in \mathbb{B}_{1,X}$ и найдем $y \in F$ так, чтобы $\|Tx - y\| < \varepsilon/2$. Справедливы следующие неравенства:

$$\|Tx - PTx\| \leqslant \|Tx - y\| + \|y - PTx\| = \|Tx - y\| + \|P(y - Tx)\| \leqslant 2\|Tx - y\| < \varepsilon.$$

Ввиду произвольности $x \in \mathbb{B}_{1,X}$ это означает, что $\|T - PT\| \leqslant \varepsilon$. Поскольку $PT \in \mathscr{F}(X,H)$, а $\varepsilon > 0$ произвольно, мы заключаем, что $T \in \overline{\mathscr{F}(X,H)}$, как и требовалось. □

Верен ли результат предложения 19.1 для произвольных банаховых пространств? Этот вопрос в течение долгого времени оставался одной из наиболее знаменитых нерешенных задач функционального анализа. В этой связи была принята следующая терминология.

Определение 19.1. Банахово пространство Y обладает *свойством аппроксимации*, если для каждого банахова пространства X справедливо равенство $\overline{\mathscr{F}(X,Y)} = \mathscr{K}(X,Y)$.

Свойство аппроксимации, по-видимому, впервые упоминается в основополагающей монографии С. Банаха «Теория линейных операций» (1932 г.), однако систематически его начал исследовать А. Гротендик в 1950-х гг. Оказалось, что свойство аппроксимации допускает целую серию эквивалентных характеризаций и тесно связано с рядом других важных вопросов функционального анализа. Начиная с работ Гротендика, свойство аппроксимации и его разновидности стали интенсивно изучаться многими математиками. Было показано, что свойством аппроксимации обладают практически все конкретные примеры банаховых пространств; однако вопрос о том, всякое ли банахово пространство обладает свойством аппроксимации (получивший название *проблемы аппроксимации*), оставался открытым на протяжении еще двух десятилетий. Прорыв произошел в 1972 г., когда П. Энфло построил первый пример банахова пространства без свойства аппроксимации. Пример Энфло был в высшей степени нетривиален. Впоследствии он был существенно упрощен, появилось и много других примеров, однако во всех известных случаях доказательство отсутствия свойства аппроксимации у того или иного банахова пространства — это весьма трудная задача. С одним таким пространством мы на самом деле знакомы: как показал А. Шанковский в 1981 г., пространство ограниченных операторов $\mathscr{B}(\ell^2)$ не обладает свойством аппроксимации.

Сложность проблемы аппроксимации была обусловлена в том числе и тем, что она тесно связана с другой знаменитой проблемой функционального анализа — *проблемой базиса*.

Определение 19.2. Последовательность элементов $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в банаховом пространстве X называется *базисом Шаудера* (или просто *базисом*), если каждый элемент $x \in X$ единственным образом представим в виде $x = \sum_n c_n e_n$, где $c_n \in \mathbb{K}$.

Отметим, что банахово пространство, обладающее базисом Шаудера, с необходимостью сепарабельно (объясните, почему).

Понятие базиса ввел Ю. Шаудер в 1927 г. Довольно быстро выяснилось, что многие «классические» сепарабельные банаховы пространства обладают базисами. Например, любой ортонормированный базис в сепарабельном гильбертовом пространстве является базисом Шаудера. Также очевидно, что базис Шаудера есть в пространствах c_0 и ℓ^p для всех $1 \leqslant p < \infty$: в качестве e_n можно взять последовательность с единицей на n-ом месте и нулем на остальных. Тригонометрическая система (см. примеры 6.2 и 6.3) является базисом в $L^p[a,b]$ для всех $1 < p < \infty$ (М. Рисс, 1927), хотя и не является базисом в $L^1[a,b]$ (А. Лебег, 1909). Система Хаара (см. листок 4) является базисом в $L^p[a,b]$ для всех $1 \leqslant p < \infty$ (Шаудер, 1928). В пространстве $C[0,1]$ есть базис из кусочно линейных функций — так называемый *базис Фабера–Шаудера* (Шаудер, 1927).

Вопрос о том, всякое ли сепарабельное банахово пространство обладает базисом Шаудера, был впервые явно высказан Банахом в 1932 г. Впоследствии этот вопрос получил название *проблемы базиса*. Можно (и не очень сложно) показать, что банахово пространство с базисом Шаудера имеет свойство аппроксимации. Таким образом, решив проблему аппроксимации, Энфло тем самым решил и проблему базиса — банахово пространство, которое он построил, было сепарабельным, поэтому из-за отсутствия свойства аппроксимации не могло иметь базис.

Отметим, что бывают (довольно экзотические) банаховы пространства без базиса, имеющие тем не менее свойство аппроксимации.

Обратимся теперь к примерам компактных операторов.

Пример 19.1. Тождественное вложение пространства $C^1[a,b]$ в $C[a,b]$ является компактным оператором. В самом деле, если $\|f\|_{C^1[a,b]} \leqslant 1$, то $|f'(t)| \leqslant 1$ для всех $t \in [a,b]$, откуда с учетом теоремы Лагранжа следует, что $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$ для всех $x, y \in [a,b]$. Из полученного неравенства, в свою очередь, следует, что единичный шар пространства $C^1[a,b]$ равностепенно непрерывен. Поскольку он, очевидно, ограничен по равномерной норме, мы можем воспользоваться теоремой Арцела–Асколи 18.9, из которой следует, что этот шар компактен как подмножество в $C[a,b]$. Но это и означает, что вложение $C^1[a,b]$ в $C[a,b]$ — компактный оператор.

Предложение 19.2. *Пусть $X = \ell^p$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$) или $X = c_0$, и пусть $\lambda = (\lambda_n) \in \ell^\infty$. Диагональный оператор $M_\lambda \colon X \to X$ компактен тогда и только тогда, когда $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$ (т.е. когда $\lambda \in c_0$).*

Доказательство. Предположим, что $\lambda \in c_0$. Напомним, что c_0 является замыканием в ℓ^∞ пространства финитных последовательностей c_{00} (см. листки 1 и 2). Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $\mu \in c_{00}$ так, чтобы $\|\lambda - \mu\|_\infty < \varepsilon$. С учетом предложения 2.6 получаем

$$\|M_\lambda - M_\mu\| = \|M_{\lambda-\mu}\| = \|\lambda - \mu\|_\infty < \varepsilon.$$

Но оператор M_μ, очевидно, имеет конечномерный образ. Применяя следствие 18.13, заключаем, что M_λ компактен.

Предположим теперь, что $\lambda \notin c_0$. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ существует такая подпоследовательность (λ_{n_k}) последовательности (λ_n), что $|\lambda_{n_k}| \geqslant \varepsilon$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Обозначим, как обычно, через $e_n \in X$ последовательность с единицей на n-ом месте и нулем на остальных. Для всех $i \neq j$ имеем оценку

$$\|M_\lambda e_{n_i} - M_\lambda e_{n_j}\| = \|\lambda_{n_i} e_{n_i} - \lambda_{n_j} e_{n_j}\| \geqslant \varepsilon \cdot 2^{1/p}.$$

Отсюда с учетом теоремы 17.6 следует, что множество $M_\lambda(\mathbb{B}_{1,X})$ не является вполне ограниченным, т.е. оператор M_λ не является компактным. $\square$

Пример 19.2. Пусть $I = [a,b]$, и пусть $K \in C(I \times I)$. Рассмотрим интегральный оператор $T_K \colon C(I) \to C(I)$, действующий по формуле

$$(T_K f)(x) = \int_I K(x,y) f(y)\, dy$$

(см. пример 2.6). Нетрудно проверить (проверьте!), что он переводит единичный шар пространства $C(I)$ в ограниченное и равностепенно непрерывное множество. Отсюда с учетом теоремы Арцела–Асколи 18.9 следует, что оператор T_K компактен.

Пример 19.3. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, $K \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$, и пусть $T_K \colon L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$ — интегральный оператор Гильберта–Шмидта (см. пример 2.7). Напомним, что он действует по формуле

$$(T_K f)(x) = \int_X K(x,y) f(y)\, d\mu(y).$$

Этот оператор также компактен. Попробуйте доказать это утверждение, воспользовавшись указанием из листка 15.

19.2. Фредгольмовы операторы

К компактным операторам мы еще не раз вернемся, пока же познакомимся с так называемыми *фредгольмовыми* операторами. Эти операторы совершенно не похожи на компактные и никогда (за исключением тривиальных случаев) не бывают компактными. Однако, как вскоре выяснится, между фредгольмовыми и компактными операторами имеется тесная связь.

Определение 19.3. Пусть X и Y — векторные пространства. Линейный оператор $T\colon X \to Y$ называется *фредгольмовым*, если его ядро и коядро (см. определение 13.2) конечномерны. Если X и Y — банаховы пространства, то фредгольмовы операторы из X и Y по умолчанию предполагаются ограниченными.

С каждым фредгольмовым оператором можно связать одну важную числовую характеристику:

Определение 19.4. *Индексом* фредгольмова оператора $T\colon X \to Y$ называется число $\operatorname{ind} T = \dim \operatorname{Ker} T - \dim \operatorname{Coker} T$.

Вот несколько простейших примеров.

Пример 19.4. Любой изоморфизм $T\colon X \to Y$, очевидно, фредгольмов и $\operatorname{ind} T = 0$.

Пример 19.5. Если $P\colon X \to X$ — проектор с конечномерным ядром, то он фредгольмов и $\operatorname{ind} P = 0$. Это немедленно следует из разложения $X = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P$.

Пример 19.6. Пусть $X = \ell^p$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$) или $X = c_0$, и пусть $T_\ell, T_r\colon X \to X$ — операторы левого и правого сдвига. Заметим, что T_ℓ сюръективен и имеет одномерное ядро, а T_ℓ инъективен и имеет образ коразмерности 1. Следовательно, оба эти оператора фредгольмовы, $\operatorname{ind} T_\ell = 1$ и $\operatorname{ind} T_r = -1$.

Замечание 19.1. Другие примеры фредгольмовых операторов см. в листках 16 и 17. В частности, весьма важный для анализа и топологии класс фредгольмовых операторов — это *операторы Тёплица* из листка 17. Другой и, пожалуй, еще более важный класс фредгольмовых операторов — это *эллиптические псевдодифференциальные операторы* на многообразиях. Самый простой пример такого оператора — лапласиан $\partial^2/\partial\theta^2$ на окружности (имеющий индекс 0; см. листок 16). Кульминацией теории эллиптических операторов является знаменитая теорема Атья–Зингера об индексе, выражающая индекс такого оператора в чисто топологических терминах. Заниматься эллиптическими операторами мы не будем, поскольку даже самое элементарное введение в их теорию потребовало бы немало времени. Познакомиться с эллиптическими операторами можно, например, по запискам лекций М. С. Аграновича (см. `http://ium.mccme.ru`). Вероятно, в ближайшее время М. С. Вербицкий прочитает у нас на факультете спецкурс на эту тему.

Иногда в определении фредгольмова оператора между банаховыми пространствами дополнительно требуют, чтобы этот оператор имел замкнутый образ. Следующее предложение показывает, что это требование выполняется автоматически.

Предложение 19.3. *Пусть X и Y — банаховы пространства, $T\colon X \to Y$ — ограниченный линейный оператор. Предположим, что $\operatorname{Im} T$ имеет конечную коразмерность в Y. Тогда $\operatorname{Im} T$ замкнут в Y.*

Доказательство. Переходя, если нужно, к индуцированному оператору $\widehat{T}\colon X/\operatorname{Ker} T \to Y$, мы можем с самого начала считать, что T инъективен. Выберем конечномерное подпространство $Y_0 \subseteq Y$ так, чтобы $Y = \operatorname{Im} T \oplus Y_0$, и рассмотрим оператор

$$S\colon X \oplus_1 Y_0 \to Y, \quad (x, y) \mapsto Tx + y.$$

Легко видеть, что S ограничен, биективен и является в силу теоремы Банаха 12.5 топологическим изоморфизмом. Следовательно, S переводит замкнутые множества в замкнутые. Поскольку подпространство $X \oplus_1 \{0\}$ замкнуто в $X \oplus_1 Y_0$, мы видим, что $\operatorname{Im} T = S(X \oplus_1 \{0\})$ — замкнутое подпространство в Y. $\square$

Следствие 19.4. *Фредгольмов оператор между банаховыми пространствами имеет замкнутый образ.*

Посмотрим еще раз на пример 19.6 и вспомним, что операторы сдвига $T_\ell\colon \ell^p \to \ell^p$ и $T_r\colon \ell^q \to \ell^q$ (где $p, q \in (1, +\infty)$ и $1/p + 1/q = 1$) сопряжены друг другу (см. предложение 7.5). То, что индексы этих операторов отличаются знаком, является иллюстрацией следующего общего факта.

Предложение 19.5. *Пусть X и Y — банаховы пространства. Ограниченный линейный оператор $T\colon X \to Y$ фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмов его сопряженный оператор $T^*\colon Y^* \to X^*$. При этом*

(i) $\operatorname{ind} T^* = -\operatorname{ind} T$;
(ii) $\operatorname{ind} T = \dim \operatorname{Ker} T - \dim \operatorname{Ker} T^*$.

Доказательство. Сначала отметим следующие два несложных факта:

(a) конечномерное нормированное пространство и его сопряженное имеют одинаковую размерность;
(b) если пространство, сопряженное к нормированному пространству E, конечномерно, то и E конечномерно.

Факт (a) сразу следует из того, что все линейные функционалы на конечномерном нормированном пространстве ограничены (см. листок 2), а для доказательства факта (b) достаточно вложить E в E^{**}.

С учетом фактов (a) и (b) и следствия 19.4, доказываемое предложение становится простым следствием теоремы 13.13. $\square$

Одно из важнейших свойств индекса — его аддитивность:

Теорема 19.6. *Пусть X, Y, Z — векторные пространства, $T\colon X \to Y$ и $S\colon Y \to Z$ — фредгольмовы линейные операторы. Тогда оператор $ST\colon X \to Z$ также фредгольмов, и $\operatorname{ind} ST = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T$.*

Доказательство теоремы основано на двух алгебраических леммах. Вероятно, обе они встречались вам в курсах алгебры или топологии; если же нет — докажите их самостоятельно в качестве упражнений.

Лемма 19.7. *Пусть* $0 \to X_0 \to X_1 \to \dots \to X_n \to 0$ *— точная последовательность конечномерных векторных пространств. Тогда* $\sum_i (-1)^i \dim X_i = 0$.

Лемма 19.8 (о змее)**.** *Пусть дана коммутативная диаграмма векторных пространств (или модулей над произвольным кольцом)*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & X'' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Y \arrow[r] & Y'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{19.1}$$

с точными строками. Тогда существует точная последовательность

$$0 \to \operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\beta \to \operatorname{Ker}\gamma \to \operatorname{Coker}\alpha \to \operatorname{Coker}\beta \to \operatorname{Coker}\gamma \to 0.$$

Замечание 19.2. Лемма о змее является частным случаем широко используемой теоремы о том, что короткая точная последовательность цепных комплексов порождает длинную точную последовательность их групп гомологий. В данном случае комплексы — это столбцы диаграммы (19.1), к которым сверху и снизу приписаны нули.

Следующая мнемоническая картинка поясняет, при чем здесь змея:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker}\alpha \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\beta \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\gamma \arrow[d] \arrow[dddll, bend left] \\ \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \operatorname{Coker}\alpha \arrow[r] & \operatorname{Coker}\beta \arrow[r] & \operatorname{Coker}\gamma \end{tikzcd}$$

Доказательство теоремы 19.6. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\binom{\mathbf{1}_X}{T}"] \arrow[d, "T"] & X \oplus Y \arrow[r, "(-T\ \mathbf{1}_Y)"] \arrow[d, "ST \oplus \mathbf{1}_Y"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "S"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "\binom{S}{\mathbf{1}_Y}"'] & Z \oplus Y \arrow[r, "(-\mathbf{1}_Z\ S)"'] & Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Непосредственно проверяется, что она коммутативна и ее строки точны. Применяя лемму 19.8 и учитывая очевидные изоморфизмы

$$\operatorname{Ker}(ST \oplus \mathbf{1}_Y) \cong \operatorname{Ker} ST, \quad \operatorname{Coker}(ST \oplus \mathbf{1}_Y) \cong \operatorname{Coker} ST,$$

получаем точную последовательность

$$0 \to \operatorname{Ker} T \to \operatorname{Ker} ST \to \operatorname{Ker} S \to \operatorname{Coker} T \to \operatorname{Coker} ST \to \operatorname{Coker} S \to 0, \tag{19.2}$$

в которой все пространства, кроме, быть может, $\operatorname{Ker} ST$ и $\operatorname{Coker} ST$, конечномерны. Отсюда и из точности последовательности заключаем, что $\operatorname{Ker} ST$ и $\operatorname{Coker} ST$ также конечномерны, т.е. ST — фредгольмов оператор. Применяя к последовательности (19.2) лемму 19.7, получаем требуемое равенство $\operatorname{ind} T - \operatorname{ind} ST + \operatorname{ind} S = 0$. $\square$