А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 18

18.1. Компактные метрические пространства (продолжение)

В качестве простого следствия доказанной на прошлой лекции теоремы 17.5 мы получаем известный вам из курса анализа критерий компактности подмножества в $\mathbb{R}^n$:

Следствие 18.1. *Пусть X — подмножество в $\mathbb{R}^n$ (где $\mathbb{R}^n$ снабжено евклидовой нормой).*

(i) *X вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено.*
(ii) *X компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство. (i) Достаточно доказать, что куб I в $\mathbb{R}^n$ вполне ограничен. Очевидно, для каждого $\varepsilon > 0$ куб I можно представить в виде конечного объединения кубов с длиной ребра $< \varepsilon$. Но каждый из этих кубов в свою очередь покрывается шаром радиуса $< \varepsilon\sqrt{n}/2$. Следовательно, I покрывается конечным числом шаров сколь угодно малого радиуса, а это и означает, что он вполне ограничен.

(ii) Следует из (i) и следствия 17.14. $\square$

Напомним, что с помощью п. (ii) следствия 18.1 мы в свое время доказали эквивалентность норм на конечномерном векторном пространстве (см. предложение 1.5). Используя это утверждение, мы можем уточнить следствие 18.1 следующим образом.

Следствие 18.2. *Утверждения* (i) *и* (ii) *следствия* 18.1 *справедливы для подмножеств любого конечномерного нормированного пространства.*

Следующий пример показывает, что в бесконечномерной ситуации все устроено по-другому.

Пример 18.1. Пусть $E = \ell^p$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$) или $E = c_0$, и пусть $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ — сфера в E. Как обычно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $e_n \in S$ последовательность с единицей на n-м месте и нулем на остальных. Легко видеть, что $\|e_i - e_j\| = 2^{1/p}$ для всех $i \neq j$. Но во вполне ограниченном метрическом пространстве не может существовать бесконечного набора точек (e_n) с таким свойством (см. п. (iii) теоремы 17.6). Следовательно, сфера S не является вполне ограниченной и тем более не является компактной.

На самом деле ситуация, описанная в примере 18.1, является правилом, а не исключением. Скоро мы увидим, что ни в каком бесконечномерном нормированном пространстве сфера не является вполне ограниченной. Для этого нам понадобится следующее понятие, имеющее и самостоятельный интерес.

Определение 18.1. Пусть X — нормированное пространство, $X_0 \subset X$ — векторное подпространство и $\varepsilon \geqslant 0$. Вектор $h \in X$ называется *ε-перпендикуляром* к X_0, если $\|h\| = 1$ и $\rho(h, X_0) \geqslant 1 - \varepsilon$.

Замечание 18.1. Отметим, что условие $\|h\| = 1$ влечет неравенство $\rho(h, X_0) \leqslant 1$. Таким образом, ε-перпендикуляр — это такой единичный вектор, для которого 0 является «почти ближайшим» элементом подпространства X_0.

Следующий пример объясняет происхождение термина «ε-перпендикуляр».

Пример 18.2. Пусть H — предгильбертово пространство и $H_0 \subset H$ — векторное подпространство. Вектор $h \in H$ является 0-перпендикуляром к H_0 тогда и только тогда, когда $\|h\| = \rho(h, H_0) = 1$, т.е. когда $\|h\| = 1$ и ближайшим к h элементом подпространства H_0 является 0. Согласно предложению 5.5 это равносильно тому, что $h \perp H_0$, т.е. h — «настоящий» перпендикуляр к H_0. Напомним (см. теорему 5.9), что такой h заведомо существует, если H — гильбертово пространство, а H_0 — его собственное замкнутое векторное подпространство.

В общем случае 0-перпендикуляра к подпространству $X_0 \subsetneq X$ может и не существовать, даже если X банахово и X_0 замкнуто в X (см. листок 15). Тем не менее, справедливо следующее утверждение.

Лемма 18.3 (Рисс). *Пусть X_0 — векторное подпространство нормированного пространства X, не плотное в X. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ в X существует ε-перпендикуляр к X_0.*

Доказательство. Возьмем $y \in X \setminus \overline{X_0}$ и положим $d = \rho(y, X_0)$. Очевидно, $d > 0$. Для каждого $\delta > 0$ подберем $x_\delta \in X_0$ так, чтобы $\|y - x_\delta\| \leqslant d + \delta$, и положим

$$h_\delta = \frac{y - x_\delta}{\|y - x_\delta\|}.$$

Тогда $\|h_\delta\| = 1$, и для любого $x \in X_0$ имеем:

$$\|h_\delta - x\| = \frac{1}{\|y - x_\delta\|} \big\|y - (x_\delta + \|y - x_\delta\| x)\big\| \geqslant \frac{d}{d + \delta},$$

что больше $1 - \varepsilon$ при достаточно малом δ. Значит, h_δ — ε-перпендикуляр к X_0. □

Следствие 18.4. *Сфера в бесконечномерном нормированном пространстве не является вполне ограниченной и, следовательно, не является компактной.*

Доказательство. Поскольку наше пространство X бесконечномерно, в нем существует возрастающая цепочка подпространств $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \ldots$, такая, что $\dim X_n = n$ для всех n. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдем вектор $h_n \in X_{n+1}$, являющийся 1/2-перпендикуляром к X_n. Получим последовательность (h_n) точек сферы $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$, удовлетворяющую условию $\|h_i - h_j\| \geqslant 1/2$ при $i \neq j$. Применяя теорему 17.6, видим, что сфера S не является вполне ограниченной. □

Напомним, что топологическое пространство X называется *локально компактным*, если каждая его точка имеет окрестность, замыкание которой компактно. Таковы, например, все конечномерные нормированные пространства, все их открытые и замкнутые подмножества, все конечномерные многообразия... Простейший пример топологического пространства, не являющегося локально компактным, — множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел с унаследованной из $\mathbb{R}$ топологией.

Следствие 18.5. *Бесконечномерное нормированное пространство не является локально компактным.*

Следует иметь в виду, что вполне ограниченность (в отличие от компактности) не является топологическим свойством: например, интервал вполне ограничен, а гомеоморфная ему прямая — нет. Тем не менее, есть важный класс отображений, сохраняющих вполне ограниченность. С этими отображениями вы уже встречались в курсе анализа.

Определение 18.2. Пусть X, Y — метрические пространства. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *равномерно непрерывным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых точек $x, y \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x, y) < \delta$, выполнено неравенство $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Разумеется, всякое равномерно непрерывное отображение непрерывно, но не наоборот (см. курс анализа).

Пример 18.3. Если X и Y — нормированные пространства, то каждый непрерывный линейный оператор $T\colon X \to Y$ равномерно непрерывен. В самом деле, для любых $x, y \in X$ имеем $\|Tx - Ty\| \leqslant \|T\|\|x - y\|$, и в качестве нужного δ из определения 18.2 можно взять $\delta = \varepsilon/\|T\|$.

Теорема 18.6 (Кантор)**.** *Пусть X — компактное, а Y — произвольное метрические пространства. Тогда каждое непрерывное отображение из X в Y равномерно непрерывно.*

Доказательство ничем не отличается от известного вам случая $X = [a, b]$ и $Y = \mathbb{R}$, поэтому мы его опускаем.

Предложение 18.7. *Пусть X и Y — метрические пространства, причем X вполне ограничено. Тогда для любого равномерно непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ его образ $f(X)$ вполне ограничен.*

Доказательство. Упражнение. □

Замечание 18.2. Предложение 18.7 полезно сравнить с близким по смыслу утверждением из топологии: непрерывный образ компакта — компакт.

Для проверки компактности подмножеств «классических» банаховых пространств существуют удобные критерии, опирающиеся на специфику этих пространств (см. листок 14). Один из таких критериев, известный как *теорема Арцела–Асколи*, мы сейчас докажем. Дадим сначала следующее определение.

Определение 18.3. Пусть X, Y — метрические пространства. Семейство отображений S из X в Y называется *равностепенно непрерывным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых точек $x, y \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x, y) < \delta$, и для любого $f \in S$ выполнено неравенство $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Наблюдение 18.8. Очевидно, если семейство S равностепенно непрерывно, то каждое отображение $f \in S$ равномерно непрерывно. Если же пространство X компактно, то из теоремы Кантора 18.6 следует, что всякое *конечное* семейство непрерывных отображений из X в Y равностепенно непрерывно.

Теорема 18.9 (Арцела, Асколи)**.** *Пусть X — компактное метрическое пространство. Подмножество $S \subset C(X)$ вполне ограничено (или, что эквивалентно, относительно компактно; см. следствие* 17.14*) тогда и только тогда, когда оно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Предположим, что S вполне ограничено, и для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем конечную $\varepsilon/3$-сеть F в S. Из конечности F и теоремы Кантора 18.6 следует, что F равностепенно непрерывно (см. наблюдение 18.8). Следовательно, существует такое $\delta > 0$, что для любых точек $x, y \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x, y) < \delta$, и для любого $f \in F$ выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$. Возьмем теперь произвольную функцию $g \in S$ и подберем $f \in F$ так, чтобы $\|g - f\| < \varepsilon/3$. Тогда для любых точек $x, y \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x, y) < \delta$, будем иметь

$$|g(x) - g(y)| \leqslant |g(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Следовательно, S равностепенно непрерывно.

Предположим теперь, что S ограничено и равностепенно непрерывно. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ так, чтобы для всех точек $x, y \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x, y) < \delta$, и для всех $f \in S$ выполнялось бы неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$. Пользуясь компактностью пространства X, выберем в нем конечную δ-сеть $\{x_1, \ldots, x_n\}$, и рассмотрим отображение

$$\varphi \colon C(X) \to \mathbb{K}^n_\infty, \quad f \mapsto (f(x_1), \ldots, f(x_n))$$

(здесь, как обычно, $\mathbb{K}$ — это основное поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а $\mathbb{K}^n_\infty$ — пространство $\mathbb{K}^n$ с нормой $\|\cdot\|_\infty$ из примера 1.3). Очевидно, φ — ограниченный линейный оператор, поэтому множество $\varphi(S) \subset \mathbb{K}^n_\infty$ ограничено, а значит, и вполне ограничено в силу следствия 18.2. Следовательно, существует такое конечное подмножество $F \subseteq S$, что $\varphi(F)$ — $\varepsilon/3$-сеть в $\varphi(S)$.

Покажем, что F — ε-сеть в S. Для этого возьмем $g \in S$ и подберем $f \in F$ так, чтобы $\|\varphi(g) - \varphi(f)\|_\infty < \varepsilon/3$. Последнее неравенство означает в точности, что $|g(x_j) - f(x_j)| < \varepsilon/3$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Возьмем теперь $x \in X$ и найдем $j \in \{1, \ldots, n\}$ так, чтобы $\rho(x, x_j) < \delta$. Тогда

$$|g(x) - f(x)| \leqslant |g(x) - g(x_j)| + |g(x_j) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ввиду произвольности $x \in X$ это означает, что $\|g - f\| < \varepsilon$. Следовательно, F — ε-сеть в S, как и утверждалось. $\square$

18.2. Компактные операторы

Закончив наш экскурс в теорию метрических пространств, вернемся к линейным операторам. Пусть X и Y — банаховы пространства (как обычно, над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Напомним, что через $\mathbb{B}_{1,X}$ мы обозначаем замкнутый единичный шар в пространстве X.

Определение 18.4. Линейный оператор $T\colon X \to Y$ называется *компактным*, если множество $T(\mathbb{B}_{1,X})$ относительно компактно (или, что эквивалентно, вполне ограничено; см. следствие 17.14) в Y.

Замечание 18.3. Если Y — неполное нормированное пространство, то возникает сразу два (неэквивалентных!) определения компактного оператора: можно требовать, чтобы множество $T(\mathbb{B}_{1,X})$ было относительно компактно, а можно требовать, чтобы оно было вполне ограничено. Оба эти определения встречаются в литературе, так что будьте бдительны! Мы не будем заниматься такими тонкостями, а будем с самого начала рассматривать компактные операторы только между банаховыми пространствами.

Вот несколько простых фактов о компактных операторах, следующих непосредственно из определения.

Предложение 18.10. *Пусть X и Y — банаховы пространства, $T\colon X \to Y$ — линейный оператор.*

(i) *T компактен тогда и только тогда, когда для любого ограниченного множества $B \subset X$ его образ $T(B)$ относительно компактен в Y;*
(ii) *если T компактен, то он ограничен;*
(iii) *если Y конечномерно, то компактность T равносильна его ограниченности;*
(iv) *тождественный оператор $\mathbf{1}_X$ компактен тогда и только тогда, когда X конечномерно;*
(v) *если Y бесконечномерно и T сюръективен, то он не компактен.*

Доказательство. (i) Ограниченное множество содержится в некотором шаре, а из линейности и компактности T следует, что он переводит любой шар в относительно компактное множество.

(ii) Следует из предложения 1.1.

(iii) Следует из следствия 18.2.

(iv) Следует из следствия 18.4.

(v) Если T сюръективен и ограничен, то он открыт в силу теоремы Банаха 12.1. Следовательно, множество $T(\mathbb{B}_{1,X})$ содержит шар и не может быть относительно компактным в силу следствия 18.4. $\square$

Множество всех компактных линейных операторов из X в Y обозначается через $\mathscr{K}(X,Y)$. При $Y = X$ вместо $\mathscr{K}(X,X)$ пишут $\mathscr{K}(X)$.

Теорема 18.11. *Пусть X и Y — банаховы пространства. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *$\mathscr{K}(X,Y)$ — замкнутое векторное подпространство в $\mathscr{B}(X,Y)$;*

(ii) *если Z — банахово пространство, $T\colon X \to Y$ и $S\colon Y \to Z$ — ограниченные линейные операторы, один из которых компактен, то и ST компактен;*
(iii) *ограниченный линейный оператор $T\colon X \to Y$ компактен тогда и только тогда, когда компактен его сопряженный оператор $T^*\colon Y^* \to X^*$.*

Доказательство. (i) Для любых $S, T \in \mathscr{K}(X, Y)$ имеет место включение

$$(S + T)(\mathbb{B}_{1,X}) \subseteq S(\mathbb{B}_{1,X}) + T(\mathbb{B}_{1,X}).$$

Но сумма двух вполне ограниченных множеств, как нетрудно проверить (проверьте!), является вполне ограниченным множеством. Следовательно, $S + T \in \mathscr{K}(X, Y)$. Аналогично проверяется, что $\lambda S \in \mathscr{K}(X, Y)$ для любого $\lambda \in \mathbb{K}$.

Пусть теперь оператор $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ принадлежит замыканию подпространства $\mathscr{K}(X, Y)$. Для $\varepsilon > 0$ подберем оператор $S \in \mathscr{K}(X, Y)$ так, чтобы $\|S - T\| < \varepsilon/2$. Пусть $F \subset Y$ — конечная $\varepsilon/2$-сеть для $S(\mathbb{B}_{1,X})$. Легко проверить, что F будет ε-сетью для $T(\mathbb{B}_{1,X})$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ это доказывает, что $T \in \mathscr{K}(X, Y)$.

(ii) Если S компактен, а T ограничен, то множество $S(T(\mathbb{B}_{1,X}))$ является образом ограниченного множества $T(\mathbb{B}_{1,X})$ под действием компактного оператора S и поэтому относительно компактно. Если же S ограничен, а T компактен, то множество $S(T(\mathbb{B}_{1,X}))$ является образом относительно компактного множества $T(\mathbb{B}_{1,X})$ под действием непрерывного оператора S и поэтому относительно компактно.

(iii) Предположим, что оператор T компактен, и положим $K = \overline{T(\mathbb{B}_{1,X})}$. Для любых $f, g \in \mathbb{B}_{1,Y^*}$ имеем

$$\begin{aligned}\|T^*(f) - T^*(g)\| &= \|f \circ T - g \circ T\| = \sup_{x \in \mathbb{B}_{1,X}} |f(Tx) - g(Tx)| \\ &= \sup_{y \in T(\mathbb{B}_{1,X})} |f(y) - g(y)| = \sup_{y \in K} |f(y) - g(y)| = \|f|_K - g|_K\|_{C(K)}.\end{aligned} \tag{18.1}$$

Рассмотрим множество

$$M = \{f|_K : f \in \mathbb{B}_{1,Y^*}\} \subset C(K).$$

Из (18.1) следует, что отображение

$$\varphi\colon M \to T^*(\mathbb{B}_{1,Y^*}), \quad \varphi(f|_K) = T^*(f) \qquad (f \in \mathbb{B}_{1,Y^*}),$$

корректно определено и изометрично. Очевидно, оно также сюръективно и является поэтому изометрическим изоморфизмом метрических пространств M и $T^*(\mathbb{B}_{1,Y})$. Поэтому, чтобы доказать компактность оператора T^*, нам достаточно проверить, что множество $M \subset C(K)$ вполне ограничено, т.е. ограничено и равностепенно непрерывно (см. теорему Арцела–Асколи 18.9) . Полагая $C = \sup\{\|x\| : x \in K\}$, для любого $f \in \mathbb{B}_{1,Y^*}$ и любого $x \in K$ получаем $|f(x)| \leqslant \|f\|\|x\| \leqslant C$. Следовательно, M ограничено. Далее, для любых $x, y \in K$ и любого $f \in \mathbb{B}_{1,Y^*}$ справедливо неравенство $|f(x) - f(y)| \leqslant \|x - y\|$, из которого легко следует равностепенная непрерывность множества M. С учетом сказанного выше это доказывает компактность оператора T^*.

Предположим теперь, что оператор T^* компактен. Из только что доказанного утверждения следует, что оператор T^{**} также компактен. Отсюда с учетом предложения 11.2 получаем, что и T компактен. $\square$

Замечание 18.4. Утверждение (ii) теоремы 18.11 означает, что совокупность компактных операторов между всевозможными банаховыми пространствами образует *операторный идеал.* О том, что это такое, можно прочитать в книге А. Пича «Операторные идеалы» (М.: Мир, 1982).

Следствие 18.12. *Для любого банахова пространства X множество компактных операторов $\mathscr{K}(X)$ является замкнутым двусторонним идеалом в алгебре $\mathscr{B}(X)$.*

Замечание 18.5. На самом деле для многих классических банаховых пространств $\mathscr{K}(X)$ — это единственный замкнутый двусторонний идеал в $\mathscr{B}(X)$, отличный от 0 и $\mathscr{B}(X)$. В свое время мы сможем доказать это утверждение для случая, когда X — гильбертово пространство.

Для банаховых пространств X и Y будем обозначать через $\mathscr{F}(X,Y)$ подмножество в $\mathscr{B}(X,Y)$, состоящее из операторов *конечного ранга*, т.е. из операторов с конечномерным образом. Положим также $\mathscr{F}(X) = \mathscr{F}(X,X)$. Легко видеть, что $\mathscr{F}(X,Y)$ — векторное подпространство в $\mathscr{B}(X,Y)$ (не обязательно замкнутое), и что для операторов конечного ранга справедливо утверждение, аналогичное п. (ii) теоремы 18.11. В частности, $\mathscr{F}(X)$ — двусторонний идеал в $\mathscr{B}(X)$.

Следствие 18.13. *Для любых банаховых пространств X и Y справедливо включение $\overline{\mathscr{F}(X,Y)} \subseteq \mathscr{K}(X,Y)$. Иначе говоря, если ограниченный оператор аппроксимируется (по операторной норме) ограниченными операторами конечного ранга, то он компактен.*