А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 16

16.1. Спектральный радиус

Пусть A — унитальная банахова алгебра, $a \in A$ — ее элемент.

Определение 16.1. Число $r(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$ называется *спектральным радиусом* элемента $a \in A$.

Поскольку $\sigma(a)$ — непустой компакт в $\mathbb{C}$, спектральный радиус любого элемента определен, конечен и является радиусом наименьшего замкнутого круга с центром в нуле, содержащего $\sigma(a)$.

Наблюдение 16.1. Из теоремы 15.5 (ii) следует, что $r(a) \leqslant \|a\|$.

Пример 16.1. Легко видеть, что в алгебре $A = \ell^\infty(X)$ для любого $a \in A$ справедливо равенство $r(a) = \|a\|$. То же самое верно и в любой ее спектрально инвариантной подалгебре — в частности, в алгебрах $C_b(X)$ и $B_{\mathscr{A}}(X)$ (см. пример 14.4).

Пример 16.2. Пусть $A = \mathscr{B}(\mathbb{C}^n)$, где пространство $\mathbb{C}^n$ снабжено обычной евклидовой нормой $\|\cdot\|_2$ (см. пример 1.4). Пусть T — оператор в $\mathbb{C}^n$, матрица которого в каком-либо ортонормированном базисе диагональна. Легко проверить (ср. предложение 2.6), что норма $\|T\|$ равна наибольшему из модулей его собственных значений. Следовательно, $r(T) = \|T\|$.

Через несколько лекций мы обобщим этот «игрушеченый» пример на случай так называемых *нормальных* операторов в гильбертовом пространстве.

В общем случае равенство $r(a) = \|a\|$ может и не выполняться:

Пример 16.3. Пусть $A = \mathscr{B}(\mathbb{C}^2)$, и пусть оператор T в каком-либо базисе записывается матрицей $T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Тогда $\sigma(T) = \{0\}$, поэтому и $r(T) = 0$; с другой стороны, $\|T\| \neq 0$. На самом деле аналогичное явление имеет место для любого ненулевого нильпотентного элемента (см. листок 11).

Докажем теперь полезную формулу, выражающую спектральный радиус в терминах нормы.

Теорема 16.2 (формула Бёрлинга)**.** *Пусть A — унитальная банахова алгебра, и пусть $a \in A$. Тогда*

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = \inf_{n\geqslant 1} \|a^n\|^{1/n}. \tag{16.1}$$

Доказательство. Достаточно установить, что

$$r(a) \leqslant \inf_{n\geqslant 1} \|a^n\|^{1/n} \quad \text{и} \quad r(a) \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}; \tag{16.2}$$

отсюда будет следовать как существование указанного в формулировке предела, так и его совпадение с $r(a)$.

Если $\lambda \in \sigma(a)$, то $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ ввиду теоремы об отображении спектра. Поэтому $|\lambda^n| \leqslant \|a^n\|$ и $|\lambda| \leqslant \|a^n\|^{1/n}$. Взяв inf по $n \in \mathbb{N}$, а затем sup по $\lambda \in \sigma(a)$, получаем неравенство $r(a) \leqslant \inf_n \|a^n\|^{1/n}$.

Для доказательства второго неравенства возьмем круг $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1/r(a)\}$ (если $r(a) = 0$, то $D = \mathbb{C}$), зафиксируем функционал $f \in A^*$ и заметим, что функция

$$\psi_f(\lambda) = f\big((1 - \lambda a)^{-1}\big)$$

определена всюду на D. Напомним, что функция $\lambda \mapsto (1 - \lambda a)^{-1} = -\lambda^{-1} R_a(\lambda^{-1})$ голоморфна в $D \setminus \{0\}$ (см. предложение 15.8) и стремится к 1 при $\lambda \to 0$ (см. теорему 15.3). Следовательно, функция ψ_f голоморфна в D (по теореме об устранимой особенности) и поэтому разлагается в ряд Тейлора: $\psi_f(\lambda) = \sum_n c_n \lambda^n$ для всех $\lambda \in D$.

Если $|\lambda| < 1/\|a\|$, то $(1 - \lambda a)^{-1} = \sum_n (\lambda a)^n$ (см. теорему 15.3). Поэтому $\psi_f(\lambda) = \sum_n f(a^n)\lambda^n$ для всех таких λ. Пользуясь единственностью ряда Тейлора, заключаем, что $c_n = f(a^n)$ для всех n.

Зафиксируем произвольное $\lambda \in D$, $\lambda \neq 0$. Поскольку ряд $\sum_n f(a^n)\lambda^n$ сходится, последовательность $\{f(a^n)\lambda^n\}$ ограничена. Применяя следствие 11.8 из теоремы Банаха–Штейнгауза, видим, что последовательность $\{\lambda^n a^n\}$ ограничена в A, т.е. $\|\lambda^n a^n\| \leqslant C$ для некоторого $C > 0$ и всех n. Переписывая полученное неравенство в виде $\|a^n\|^{1/n} \leqslant C^{1/n}/|\lambda|$ и переходя к верхнему пределу, получаем $\overline{\lim}_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant 1/|\lambda|$. Ввиду произвольности точки $\lambda \in D \setminus \{0\}$ отсюда следует, что $\overline{\lim}_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant r(a)$, как и требовалось.

Итак, оба неравенства (16.2) установлены, и теорема доказана. □

Замечание 16.1. Вы, наверное, заметили, что формула Бёрлинга напоминает формулу Коши–Адамара из комплексного анализа. В этом нет ничего удивительного: на самом деле основные утверждения о рядах Лорана голоморфных функций можно перенести (попробуйте это сделать!) на случай функций со значениями в банаховом пространстве. В частности, если X — банахово пространство, то всякая голоморфная в кольце $D_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ функция $f \colon D_{r,R} \to X$ разлагается в $D_{r,R}$ в ряд Лорана $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n$ (где $c_n \in X$). Если при этом f не продолжается до голоморфной функции в большем кольце, то радиусы r и R можно вычислить по формулам Коши–Адамара

$$R = \Big(\varlimsup_{n \to +\infty} \|c_n\|^{1/n}\Big)^{-1}, \quad r = \varlimsup_{n \to +\infty} \|c_{-n}\|^{1/n}. \tag{16.3}$$

Используя эти факты, можно получить простое доказательство формулы Бёрлинга. В самом деле, резольвентная функция R_a элемента a унитальной банаховой алгебры A голоморфна в кольце $D_{r(a),\infty}$ и, как нетрудно проверить, не продолжается до голоморфной функции в большем кольце. С другой стороны, при $|\lambda| > \|a\|$ имеем разложение

$$R_a(\lambda) = -\lambda^{-1}(1 - \lambda^{-1} a)^{-1} = -\sum_{n \geqslant 0} a^n \lambda^{-n-1}.$$

Следовательно, это же разложение имеет место и при $|\lambda| > r(a)$, и из (16.3) следует, что $r(a) = \overline{\lim}_n \|a^n\|^{1/n}$. Вместе с неравенством $r(a) \leqslant \inf_n \|a^n\|^{1/n}$, которое составляет «простую часть» доказательства формулы Бёрлинга (см. выше), это дает нужное равенство (16.1).

Следствие 16.3. *Для $a \in A$ следующие условия эквивалентны:*

(i) $\sigma(a) = \{0\}$;
(ii) $r(a) = 0$;
(iii) $\|a^n\| = o(\varepsilon^n)$ *при* $n \to \infty$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *(т.е. нормы степеней элемента* a *стремятся к нулю быстрее, чем любая геометрическая прогрессия).*

Определение 16.2. Элемент $a \in A$, удовлетворяющий эквивалентным условиям следствия 16.3, называется *квазинильпотентным.*

Для сравнения напомним, что элемент $a \in A$ называется *нильпотентным*, если $a^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Разумеется, всякий нильпотентный элемент квазинильпотентен, однако обратное неверно. Вот классический пример.

Упражнение 16.1. Пусть $I = [a, b]$ и $K \in L^2(I \times I)$. *Интегральный оператор Вольтерра* $V_K \colon L^2(I) \to L^2(I)$ задается формулой

$$(V_K f)(x) = \int_a^x K(x, y) f(y)\, dy.$$

(i) Докажите, что если K ограничена, то V_K квазинильпотентен.
(ii)* Докажите, что V_K квазинильпотентен для любой $K \in L^2(I \times I)$.

Операторы Вольтерра образуют важный и довольно хорошо изученный класс линейных операторов. В частности, они играют важную роль в теории интегральных уравнений, описывающих различные физические процессы. То, что оператор Вольтерра квазинильпотентен, означает в точности, что для любой функции $g \in L^2(I)$ и любого $\lambda \in \mathbb{C}$ *интегральное уравнение Вольтерра второго рода* $f = \lambda V_K f + g$ с неизвестной функцией $f \in L^2(I)$ имеет единственное решение.

Еще одно полезное следствие формулы Бёрлинга заключается в том, что при «уменьшении» алгебры A спектральный радиус ее элемента остается прежним (напомним, что сам спектр может при этом увеличиться; см., например, листок 12).

Следствие 16.4. *Пусть A — унитальная банахова алгебра, $B \subseteq A$ — замкнутая подалгебра, причем $1_A \in B$. Тогда $r_B(b) = r_A(b)$ для любого $b \in B$.*

Более точная информация о том, насколько $\sigma_B(b)$ может быть больше, чем $\sigma_A(b)$, содержится в листке 13.

16.2. Спектры ограниченных операторов. Части спектра

От общих банаховых алгебр перейдем теперь к алгебре $\mathscr{B}(X)$ ограниченных операторов в банаховом пространстве X. Наша ближайшая задача — вычислить спектры некоторых классических операторов, обсудить несколько общих приемов вычисления спектра и попутно понять, на какие части естественно разбить спектр линейного оператора.

Предложение 16.5. *Пусть $X = \ell^p$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$) или $X = c_0$, $\alpha = (\alpha_n) \in \ell^\infty$ и $M_\alpha \colon X \to X$ — диагональный оператор (см. пример 2.2). Тогда $\sigma(M_\alpha) = \overline{\{\alpha_n\}}_{n \in \mathbb{N}}$.*

Доказательство. Обозначим, как обычно, через e_n последовательность с единицей на n-ом месте и нулем на остальных. Очевидно, $M_\alpha e_n = \alpha_n e_n$. Отсюда с учетом замкнутости спектра следует, что $\overline{\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}} \subseteq \sigma(M_\alpha)$. Для доказательства обратного включения заметим, что отображение

$$\varphi\colon \ell^\infty \to \mathscr{B}(X), \quad \varphi(\alpha) = M_\alpha,$$

является унитальным гомоморфизмом и поэтому не увеличивает спектр (предложение 14.2). Таким образом,

$$\sigma(M_\alpha) = \sigma_{\mathscr{B}(X)}(\varphi(\alpha)) \subseteq \sigma_{\ell^\infty}(\alpha) = \overline{\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$$

(см. пример 14.4). Это завершает доказательство. □

Полученный результат можно обобщить следующим образом.

Предложение 16.6. *Пусть (Ω, μ) — пространство с мерой*[1]*, $X = L^p(\Omega, \mu)$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$), $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ и $M_f\colon X \to X$ — оператор умножения (см. пример 2.5). Тогда спектр $\sigma(M_f)$ равен множеству существенных значений функции f.*

Доказательство. Как и в предыдущем предложении, имеем унитальный гомоморфизм

$$\varphi\colon L^\infty(\Omega, \mu) \to \mathscr{B}(X), \quad \varphi(f) = M_f.$$

Напомним, что $\sigma_{L^\infty}(f)$ — это в точности множество существенных значений функции f (см. пример 14.5). Поэтому, чтобы доказать требуемое равенство, остается проверить, что гомоморфизм φ переводит необратимые элементы алгебры $L^\infty(\Omega, \mu)$ в необратимые операторы (см. предложение 14.2).

Итак, пусть $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ — необратимый элемент. Это означает в точности, что 0 — существенное значение функции f, т.е. $\mu(f^{-1}(U)) > 0$ для любой окрестности нуля $U \subseteq \mathbb{C}$. Для каждого $\delta > 0$ выберем измеримое подмножество $E_\delta \subseteq \Omega$ так, чтобы $0 < \mu(E_\delta) < \infty$ и $|f(x)| < \delta$ для всех $x \in E_\delta$. Тогда функция $\chi_\delta = \chi_{E_\delta}$ лежит в X, причем $\chi_\delta \neq 0$ в X. Нетрудно проверить (проверьте!), что $\|M_f \chi_\delta\| \leqslant \delta \|\chi_\delta\|$ (см. пример 2.5). Следовательно, оператор M_f не топологически инъективен, а значит, необратим. □

Если внимательно посмотреть на разобранные выше примеры, то может возникнуть естественное желание разбить спектр оператора T на несколько частей в зависимости от того, по какой причине соответствующий оператор $T - \lambda\mathbf{1}$ необратим.

Вообще, пусть S — произвольный ограниченный оператор в банаховом пространстве X. Почему он может оказаться необратимым? Во-первых, может оказаться, что $\operatorname{Ker} S \neq 0$ (в конечномерном случае этим все и исчерпывается — инъективный оператор в конечномерном пространстве обратим). Во-вторых, возможен случай, когда $\operatorname{Ker} S = 0$, но $\operatorname{Im} S \neq X$ (приведите пример!). Его удобно разбить на два подслучая: либо $\operatorname{Im} S$ плотен в X, либо нет. В применении к оператору $S = T - \lambda\mathbf{1}$ это приводит к следующему определению.

[1] Как обычно, мы не предполагаем, что мера μ конечна, однако будем требовать, чтобы каждое измеримое подмножество в Ω положительной меры содержало измеримое подмножество конечной положительной меры. Этим свойством обладают все «приличные» меры — в частности, все σ-конечные меры. Если не требовать выполнения этого условия, то доказываемое утверждение перестает быть верным — приведите пример!

Определение 16.3. *Точечным спектром* оператора $T \in \mathscr{B}(X)$ называется множество

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Ker}(T - \lambda \mathbf{1}) \neq 0\}.$$

Непрерывным спектром оператора T называется множество

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T) : \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda \mathbf{1})} = X,\ \operatorname{Im}(T - \lambda \mathbf{1}) \neq X\}.$$

Наконец, *остаточным спектром* оператора T называется множество

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T) : \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda \mathbf{1})} \neq X\}.$$

Очевидно, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \sqcup \sigma_c(T) \sqcup \sigma_r(T)$. Заметим, что точечный спектр $\sigma_p(T)$ — это в точности множество собственных значений оператора T. Если пространство X конечномерно, то $\sigma(T) = \sigma_p(T)$, а $\sigma_c(T)$ и $\sigma_r(T)$ пусты. Посмотрим, что происходит в бесконечномерном случае.

Предложение 16.7. *Пусть $X = \ell^p$ (где $1 \leqslant p < \infty$) или $X = c_0$, $\alpha = (\alpha_n) \in \ell^\infty$ и $M_\alpha \colon X \to X$ — диагональный оператор (см. пример 2.2). Тогда $\sigma_p(M_\alpha) = \{\alpha_n\}$, $\sigma_c(M_\alpha) = \overline{\{\alpha_n\}} \setminus \{\alpha_n\}$ и $\sigma_r(M_\alpha) = \varnothing$.*

Доказательство. Поскольку $M_\alpha e_n = \alpha_n e_n$, справедливо включение $\{\alpha_n\} \subseteq \sigma_p(M_\alpha)$. Пусть теперь $\lambda \in \sigma(M_\alpha) \setminus \{\alpha_n\}$. Заметим, что $M_\alpha - \lambda \mathbf{1} = M_\beta$, где $\beta_n = \alpha_n - \lambda$. Поскольку $\beta_n \neq 0$ для всех n, оператор M_β инъективен, т.е. $\lambda \notin \sigma_p(M_\alpha)$. С другой стороны, вектор $e_n = \beta_n^{-1} M_\beta(e_n)$ лежит в $\operatorname{Im} M_\beta$ для всех n. Но линейная оболочка векторов e_n $(n \in \mathbb{N})$ плотна в X; значит, и $\operatorname{Im} M_\beta$ плотен в X, а это и означает, что $\lambda \in \sigma_c(M_\alpha)$. $\square$

При вычислении спектра часто бывает полезно использовать соображения подобия:

Предложение 16.8. *Пусть X, Y — банаховы пространства. Предположим, что операторы $S \in \mathscr{B}(X)$ и $T \in \mathscr{B}(Y)$ подобны (см. определение 7.4). Тогда $\sigma(S) = \sigma(T)$, $\sigma_p(S) = \sigma_p(T)$, $\sigma_c(S) = \sigma_c(T)$ и $\sigma_r(S) = \sigma_r(T)$.*

Доказательство этого предложения — простая проверка (проведите ее!).

В качестве иллюстрации вычислим спектр оператора двустороннего сдвига в $\ell^2(\mathbb{Z})$ (см. пример 2.3).

Предложение 16.9. *Пусть $T_b \colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ — оператор двустороннего сдвига. Тогда $\sigma(T_b) = \mathbb{T}$.*

Доказательство. Для каждого $n \in \mathbb{Z}$ рассмотрим функцию $f_n(z) = z^n$ $(z \in \mathbb{T})$. Как уже отмечалось в примере 6.7, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ — ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{T})$. Сопоставляя каждой функции из $L^2(\mathbb{T})$ последовательность ее коэффициентов Фурье относительно этого базиса, мы получаем унитарный изоморфизм $U \colon L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ (см. теорему 6.8), переводящий ортонормированный базис $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ в стандартный ортонормированный базис $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ пространства $\ell^2(\mathbb{Z})$. Следовательно, оператор T_b унитарно эквивалентен оператору $S = U^{-1} T_b U$ в пространстве $L^2(\mathbb{T})$. Так как $T_b e_n = e_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, то и $S f_n = f_{n+1} = f_1 f_n$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, оператор S действует на базисе $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ так же, как и оператор умножения M_{f_1} на функцию f_1. Отсюда заключаем, что $S = M_{f_1}$. Применяя предложения 16.8 и 16.6 и пользуясь тем, что множество существенных значений непрерывной функции — это просто множество ее значений (см. листок 11), получаем равенства $\sigma(T_b) = \sigma(M_{f_1}) = \mathbb{T}$. $\square$

Следующая серия приемов вычисления спектра основана на теории двойственности, т.е. на обсуждавшихся в лекции 13 взаимосвязях между свойствами оператора и свойствами его сопряженного.

Предложение 16.10. *Пусть X — банахово пространство и $T \in \mathscr{B}(X)$. Тогда $\sigma(T) = \sigma(T^*)$.*

Доказательство. Мы знаем (см. теорему 13.10), что оператор $T \in \mathscr{B}(X)$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $T^* \in \mathscr{B}(X^*)$. Остается применить это утверждение к оператору $T - \lambda \mathbf{1}_X$. □

Исследуем теперь соотношения между частями спектра операторов T и T^*, т.е. между их точечными, непрерывными и остаточными спектрами.

Предложение 16.11. *Пусть X — банахово пространство и $T \in \mathscr{B}(X)$. Тогда*

(i) $\sigma_p(T) \subseteq \sigma_p(T^*) \cup \sigma_r(T^*)$;
(ii) $\sigma_c(T) \subseteq \sigma_c(T^*) \cup \sigma_r(T^*)$;
(iii) $\sigma_r(T) \subseteq \sigma_p(T^*)$;
(iv) $\sigma_p(T^*) \subseteq \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)$;
(v) $\sigma_c(T^*) \subseteq \sigma_c(T)$;
(vi) $\sigma_r(T^*) \subseteq \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$.

Если же пространство X рефлексивно, то

(vii) $\sigma_c(T) = \sigma_c(T^*)$;
(viii) $\sigma_r(T^*) \subseteq \sigma_p(T)$.

Доказательство. Достаточно применить следствие 13.9 к оператору $T - \lambda \mathbf{1}_X$. □

В качестве иллюстрации вычислим непрерывный, точечный и остаточный спектры операторов правого и левого сдвига.

Предложение 16.12. *Пусть $1 < p < \infty$, и пусть $T_r, T_\ell \in \mathscr{B}(\ell^p)$ — операторы правого и левого сдвига. Положим*

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad \overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}, \quad \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Тогда

(i) $\sigma(T_r) = \sigma(T_\ell) = \overline{\mathbb{D}}$;
(ii) $\sigma_p(T_r) = \varnothing, \quad \sigma_c(T_r) = \mathbb{T}, \quad \sigma_r(T_r) = \mathbb{D}$;
(iii) $\sigma_p(T_\ell) = \mathbb{D}, \quad \sigma_c(T_\ell) = \mathbb{T}, \quad \sigma_r(T_\ell) = \varnothing$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что

$$\sigma(T_r) \subseteq \overline{\mathbb{D}}, \quad \sigma(T_\ell) \subseteq \overline{\mathbb{D}}, \tag{16.4}$$

поскольку $\|T_\ell\| = \|T_r\| = 1$. Найдем теперь точечные спектры наших операторов. Заметим, что

$$T_r x = \lambda x \iff (0 = \lambda x_1) \,\&\, (x_n = \lambda x_{n+1} \ \forall n) \iff x = 0,$$

поэтому

$$\sigma_p(T_r) = \varnothing. \tag{16.5}$$

С другой стороны,

$$T_\ell x = \lambda x \iff x_{n+1} = \lambda x_n \ \forall n \iff x_n = x_1 \lambda^{n-1} \ \forall n,$$

поэтому вектор $x \neq 0$ является собственным для T_ℓ с собственным значением λ тогда и только тогда, когда последовательность (λ^{n-1}) лежит в ℓ^p, т.е. когда $|\lambda| < 1$. Следовательно,

$$\sigma_p(T_\ell) = \mathbb{D}. \tag{16.6}$$

Пусть теперь число q таково, что $1/p + 1/q = 1$. Операторы $T_\ell, T_r \colon \ell^p \to \ell^p$ нам в дальнейшем будет удобно обозначать через $T_\ell^{(p)}$ и $T_r^{(p)}$ соответственно. Напомним (см. предложение 7.5), что $(T_\ell^{(p)})^* \cong T_r^{(q)}$ и $(T_r^{(p)})^* \cong T_\ell^{(q)}$ (здесь символ $\cong$ означает изометрическую эквивалентность). Применяя предложения 16.8 и 16.11, получаем следующую цепочку включений:

$$\mathbb{D} \overset{(16.6)}{=} \sigma_p(T_\ell^{(q)}) \subseteq \sigma_p(T_r^{(p)}) \cup \sigma_r(T_r^{(p)}) \overset{(16.5)}{=} \sigma_r(T_r^{(p)}) \subseteq \sigma_p(T_\ell^{(q)}) \overset{(16.6)}{=} \mathbb{D}.$$

Следовательно,

$$\sigma_r(T_r) = \mathbb{D}. \tag{16.7}$$

Из (16.4), (16.6) и (16.7) с учетом замкнутости спектра сразу следует утверждение (i). Далее, из (16.5) и (16.7) с учетом (i) следует, что

$$\sigma_c(T_r) = \mathbb{T},$$

откуда с учетом п. (vii) предложения 16.11 получаем равенство

$$\sigma_c(T_\ell) = \mathbb{T}. \tag{16.8}$$

Наконец, из (16.8), (16.6) и (i) получаем оставшееся равенство $\sigma_r(T_\ell) = \varnothing$. $\square$

Полезное упражнение — доказать предложение 16.12 «в лоб», т.е. не используя соображений двойственности. Задача вполне решаемая, но, согласитесь, с двойственностью все выглядит куда проще и красивее.

Разобранные выше примеры — лишь небольшая часть в серии задач о вычислении спектров классических операторов. Несколько других важных примеров — упражнения из листка 13; обязательно постарайтесь их сделать!