А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ
Лекция 15

15.1. Банаховы алгебры

На прошлой лекции мы видели, что спектр элемента ассоциативной алгебры может быть любым подмножеством комплексной плоскости. Однако спектры элементов некоторых алгебр, которые «по совместительству» являются банаховыми пространствами (см. примеры 14.4 и 14.5), оказались непустыми и компактными. Наша ближайшая задача — познакомиться с понятием банаховой алгебры и понять, что компактность и непустота спектра имеют место для любого элемента любой банаховой алгебры.

Определение 15.1. *Нормированная алгебра* — это алгебра A, снабженная нормой $\|\cdot\|$, которая обладает свойством $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$ для всех $a, b \in A$ (само это свойство называется *субмультипликативностью* нормы). Если алгебра A унитальна, то дополнительно требуется, чтобы выполнялось условие $\|1_A\| = 1$. *Банахова алгебра* — это полная нормированная алгебра.

Прежде чем приводить примеры, расшифруем смысл условия субмультипликативности.

Предложение 15.1. *Пусть X, Y, Z — нормированные пространства. Билинейный оператор $\varphi\colon X \times Y \to Z$ непрерывен тогда и только тогда, когда он* ограничен *в следующем смысле: существует такое $C > 0$, что $\|\varphi(x, y)\| \leqslant C\|x\|\|y\|$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$.*

Доказательство. Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство аналогичного утверждения о линейных операторах (см. теорему 1.2). ☐

Следствие 15.2. *Умножение в нормированной алгебре непрерывно.*

Замечание 15.1. Субмультипликативность нормы и условие $\|1_A\| = 1$, входящие в определение нормированной алгебры, разумеется, не следуют из непрерывности умножения. Однако если A — алгебра, снабженная нормой, относительно которой умножение непрерывно, то на A существует эквивалентная норма, удовлетворяющая условиям определения 15.1 (см. листок 12).

При рассмотрении гомоморфизмов между нормированными алгебрами разумно рассматривать только те из них, которые непрерывны (см. обсуждение в начале §1.3). Ясно, что нормированные (соответственно, банаховы) алгебры и их непрерывные гомоморфизмы образуют категорию. В ней содержится подкатегория, состоящая из унитальных нормированных (соответственно, банаховых) алгебр и непрерывных унитальных гомоморфизмов. Так же, как и в случае нормированных пространств, можно (а иногда и нужно) рассматривать не все непрерывные гомоморфизмы между нормированными алгебрами, а лишь те, которые не увеличивают норму (ср. замечание 2.2). Это дает еще несколько категорий нормированных и банаховых алгебр. Специальных обозначений для них мы вводить не будем — по крайней мере до тех пор, пока эти обозначения нам не понадобятся.

Очевидно, всякая подалгебра нормированной алгебры сама является нормированной алгеброй, а всякая замкнутая подалгебра банаховой алгебры — банаховой алгеброй. Кроме того, из непрерывности умножения в нормированной алгебре следует (убедитесь!), что замыкание любой подалгебры в нормированной алгебре тоже является подалгеброй.

Посмотрим теперь на несколько основных примеров банаховых алгебр, с которыми нам предстоит работать.

Пример 15.1. Само поле $\mathbb{C}$, разумеется, является банаховой алгеброй.

Пример 15.2. Основной для нашего курса пример — это алгебра $\mathscr{B}(X)$ ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве X. Она является банаховой алгеброй относительно обычной операторной нормы (см. предложение 1.6 и теорему 3.18).

Пример 15.3. Алгебра $\ell^\infty(X)$, где X — произвольное множество, является банаховой алгеброй относительно равномерной нормы $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X}|f(x)|$.

Пример 15.4. Пусть X — топологическое пространство. Тогда алгебра непрерывных ограниченных функций $C_b(X)$ — замкнутая подалгебра в $\ell^\infty(X)$ (см. пример 3.3) и, следовательно, является банаховой алгеброй. Подпространство $C_0(X) \subseteq C_b(X)$, состоящее из функций, исчезающих на бесконечности (см. пример 1.10), является банаховой алгеброй по той же причине (см. упражнение 3.3). В частности, пространство $c_0 = C_0(\mathbb{N})$ — банахова алгебра.

Разумеется, если X компактно, то $C(X) = C_b(X) = C_0(X)$ — банахова алгебра.

Пример 15.5. Пусть X — множество и $\mathscr{A}$ — σ-алгебра его подмножеств. Пространство $B_{\mathscr{A}}(X)$, состоящее из ограниченных $\mathscr{A}$-измеримых функций на X, является замкнутой подалгеброй в $\ell^\infty(X)$. Следовательно, $B_{\mathscr{A}}(X)$ — банахова алгебра.

Пример 15.6. Пусть (X,μ) — пространство с мерой. Мы уже отмечали выше, что пространство $L^\infty(X,\mu)$ полно (пример 3.4) и является алгеброй относительно поточечного умножения (пример 14.5). Легко проверить (проверьте!), что норма на $L^\infty(X,\mu)$ субмультипликативна. Следовательно, $L^\infty(X,\mu)$ — банахова алгебра.

Пример 15.7. Для каждого целого $n \geqslant 0$ пространство $C^n[a,b]$ полно относительно нормы

$$\|f\| = \max_{0\leqslant k\leqslant n} \|f^{(k)}\|_\infty \tag{15.1}$$

(см. листок 3) и является алгеброй относительно поточечного умножения. Норма (15.1) не субмультипликативна, однако ее можно заменить на эквивалентную ей субмультипликативную норму

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{\|f^{(k)}\|_\infty}{k!} \tag{15.2}$$

(см. листок 12). Следовательно, $C^n[a,b]$ — банахова алгебра относительно нормы (15.2).

Пример 15.8. Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — компактное подмножество. Рассмотрим следующие подалгебры в $C(K)$:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{P}(K) = \overline{\{p|_K : p \text{ — многочлен}\}};\\
&\mathscr{R}(K) = \overline{\{r|_K : r \text{ — рациональная функция с полюсами вне } K\}};\\
&\mathscr{A}(K) = \{f \in C(K) : f \text{ голоморфна в } \operatorname{Int} K\}
\end{aligned}$$

(черта наверху означает замыкание в $C(K)$). Из теоремы Вейерштрасса о сходящихся последовательностях аналитических функций (вспомните ее формулировку!) следует, что $\mathscr{A}(K)$ — замкнутая подалгебра в $C(K)$. Следовательно, мы имеем цепочку вложенных друг в друга замкнутых подалгебр

$$\mathscr{P}(K) \subseteq \mathscr{R}(K) \subseteq \mathscr{A}(K) \subseteq C(K). \tag{15.3}$$

Алгебру $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$, где $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ — замкнутый единичный круг (диск), называют иногда *дисковой алгеброй.*

Вопрос о равенстве каких-либо алгебр в цепочке (15.3) — это, как правило, довольно тонкая задача теории аппроксимации. Некоторые примеры на эту тему содержатся в листке 12.

Еще один важный класс банаховых алгебр — так называемые *свёрточные* алгебры, ассоциированные с группами и полугруппами. Их мы обсудим позже, когда будем изучать преобразование Фурье.

Напомним (см. §14.1), что через $A^\times$ мы обозначаем мультипликативную группу всех обратимых элементов унитальной алгебры A. Если A — банахова алгебра, то группа $A^\times$ обладает рядом важных свойств, описанных в следующей теореме.

Теорема 15.3. *Пусть A — унитальная банахова алгебра.*

(i) *Если $a \in A$ и $\|a\| < 1$, то $1 - a \in A^\times$ и $(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty a^n$.*
(ii) *Множество $A^\times$ открыто в A.*
(iii) *Отображение $A^\times \to A^\times$, $a \mapsto a^{-1}$, непрерывно.*

Доказательство. (i) Поскольку $\sum_{k=0}^n \|a^k\| \leqslant \sum_{k=0}^n \|a\|^k$, а алгебра A полна, мы видим, что указанный в (i) ряд сходится в A при $\|a\| < 1$ к некоторому $b \in A$. Для каждого n положим $b_n = \sum_{k=0}^n a^k$. Легко проверить, что $(1-a)b_n = b_n(1-a) = 1 - a^{n+1}$. При $n \to \infty$ получаем $(1-a)b = b(1-a) = 1$, т.е. $b = (1-a)^{-1}$, как и требовалось.

(ii) Для каждого $a \in A^\times$ отображение $L_a \colon A \to A$, $b \mapsto ab$, является гомеоморфизмом алгебры A на себя и переводит $A^\times$ в $A^\times$. В силу (i), $A^\times$ содержит окрестность единицы $U = \{b \in A : \|b - 1\| < 1\}$. Следовательно, множество $L_a(U)$ — окрестность a, содержащаяся в $A^\times$.

(iii) Проверим, что отображение $a \mapsto a^{-1}$ непрерывно в единице. Возьмем произвольный элемент $a \in A$, удовлетворяющий условию $\|a - 1\| < 1$, и положим $b = 1 - a$. Из (i) следует, что a обратим и

$$\|a^{-1} - 1\| = \|(1-b)^{-1} - 1\| \leqslant \sum_{n=1}^\infty \|b\|^n = \frac{\|b\|}{1 - \|b\|}.$$

Последнее выражение, очевидно, стремится к 0 при $b \to 0$, т.е. при $a \to 1$. Это и означает, что отображение $a \mapsto a^{-1}$ непрерывно в единице. Остается воспользоваться следующим общим фактом.

Упражнение 15.1. Пусть G — группа, снабженная топологией, причем операция умножения $G \times G \to G$ непрерывна, а операция взятия обратного элемента $G \to G$ непрерывна в единице. Докажите, что операция взятия обратного элемента непрерывна всюду на G. □

В качестве приложения установим один результат об «автоматической непрерывности». Вначале дадим следующее определение.

Определение 15.2. Пусть A — алгебра над $\mathbb{C}$. Гомоморфизмы из A в $\mathbb{C}$ называются ее *характерами.*

Замечание 15.2. Нетрудно проверить (проверьте!), что сюръективный гомоморфизм унитальных алгебр унитален. Как следствие, ненулевой характер унитальной алгебры унитален.

Следствие 15.4. *Любой характер унитальной банаховой алгебры непрерывен, и его норма не превосходит единицы.*

Доказательство. Если характер $\chi\colon A \to \mathbb{C}$ разрывен, или же если он непрерывен, но $\|\chi\| > 1$, то существует такой элемент $a \in A$, $\|a\| < 1$, что $\chi(a) = 1$. По теореме 15.3 элемент $1 - a$ обратим. Следовательно, таков же и элемент $\chi(1 - a) \in \mathbb{C}$. Но последний элемент равен нулю. Противоречие. □

Замечание 15.3. Следствие 15.4 — это простейший пример ситуации, когда непрерывность того или иного отображения между банаховыми алгебрами автоматически следует из его алгебраических свойств. Такие явления «автоматической непрерывности» (гомоморфизмов, дифференцирований, коциклов...) встречаются в теории банаховых алгебр довольно часто. На эту тему написано большое количество статей и несколько обширных монографий (см., например, H. G. Dales, “Banach Algebras and Automatic Continuity”, Oxford, 2000).

15.2. Спектр элемента банаховой алгебры

Наша ближайшая цель — показать, что спектр элемента любой унитальной банаховой алгебры компактен и непуст.

Теорема 15.5. *Пусть A — унитальная банахова алгебра и $a \in A$. Тогда*

(i) *$\sigma(a)$ — компактное подмножество в $\mathbb{C}$;*
(ii) *для любого $\lambda \in \sigma(a)$ имеем $|\lambda| \leqslant \|a\|$.*

Доказательство. Начнем с утверждения (ii). Если $|\lambda| > \|a\|$, то $\|\lambda^{-1}a\| < 1$, поэтому элемент $1-\lambda^{-1}a$ обратим по теореме 15.3. Значит, и элемент $a-\lambda 1$ обратим, т.е. $\lambda \notin \sigma(a)$. Это доказывает (ii) и, как следствие, ограниченность спектра $\sigma(a)$. Осталось доказать его замкнутость. Для этого рассмотрим отображение $\varphi\colon \mathbb{C} \to A$, $\varphi(\lambda) = a - \lambda 1$, и заметим, что резольвентное множество $\rho(a) = \varphi^{-1}(A^\times)$ открыто ввиду непрерывности отображения φ и теоремы 15.3. Следовательно, множество $\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \rho(a)$ замкнуто, как и требовалось. □

Для доказательства непустоты спектра введем следующее понятие.

Определение 15.3. Пусть A — унитальная банахова алгебра. *Резольвентной функцией* элемента $a \in A$ называется функция $R_a \colon \rho(a) \to A,\ R_a(\lambda) = (a - \lambda 1)^{-1}$.

Лемма 15.6. *Функция R_a непрерывна на $\rho(a)$, и $\lim\limits_{\lambda \to \infty} R_a(\lambda) = 0$.*

Доказательство. Непрерывность функции R_a сразу следует из непрерывности взятия обратного элемента в $A^\times$ (теорема 15.3). Далее,

$$\|R_a(\lambda)\| = \|(a - \lambda 1)^{-1}\| = |\lambda|^{-1}\, \|(1 - \lambda^{-1} a)^{-1}\|.$$

Первый сомножитель в последнем выражении стремится к нулю при $\lambda \to \infty$, а второй — к единице в силу непрерывности взятия обратного элемента. Дальнейшее очевидно. $\square$

Оказывается, резольвентная функция не только непрерывна, но и голоморфна в следующем смысле.

Определение 15.4. Пусть X — банахово пространство, а $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество. Функция $\varphi \colon U \to X$ называется *голоморфной*, если для каждого $z_0 \in U$ существует предел $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0}$. Этот предел называется *производной* функции φ в точке z_0 и обозначается $\varphi'(z_0)$.

Замечание 15.4. Легко видеть, что если $\varphi \colon U \to X$ — голоморфная функция, то для любого $f \in X^*$ функция $f \circ \varphi \colon U \to \mathbb{C}$ голоморфна в обычном смысле и $(f \circ \varphi)'(z) = f(\varphi'(z))$ для всех $z \in U$. Верно и обратное утверждение (т.е. из голоморфности функции $f \circ \varphi$ для всех $f \in X^*$ следует голоморфность функции φ), но оно нам не понадобится.

Предложение 15.7 (тождество Гильберта)**.** *Резольвентная функция удовлетворяет тождеству $R_a(\lambda) - R_a(\mu) = (\lambda - \mu) R_a(\lambda) R_a(\mu)$.*

Доказательство. Достаточно домножить обе части равенства на $a - \lambda 1$ и на $a - \mu 1$. $\square$

Из тождества Гильберта с учетом непрерывности резольвентной функции получаем следующий результат.

Предложение 15.8. *Резольвентная функция R_a голоморфна на $\rho(a)$, и $R_a'(z) = R_a(z)^2$ для любого $z \in \rho(a)$.*

Теперь у нас все готово для доказательства непустоты спектра.

Теорема 15.9. *Спектр любого элемента ненулевой унитальной банаховой алгебры непуст.*

Доказательство. Предположим противное; пусть $\sigma(a) = \varnothing$. Зафиксируем функционал $f \in A^*$ и положим $\varphi_f = f \circ R_a \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Из предложения 15.8, замечания 15.4 и леммы 15.6 следует, что φ_f — это целая функция, стремящаяся к нулю на бесконечности. По теореме Лиувилля $\varphi_f \equiv 0$. Поскольку функционал f произволен, отсюда и из следствия 9.5 теоремы Хана–Банаха получаем, что $R_a(\lambda) = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. С другой стороны, элемент $R_a(\lambda)$ обратим. Противоречие. $\square$

Вот одно простое, но интересное приложение.

Теорема 15.10 (Гельфанд, Мазур)**.** *Пусть A — ненулевая банахова алгебра с делением (т.е. унитальная банахова алгебра, в которой любой ненулевой элемент обратим). Тогда A изоморфна $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $a \in A$. Поскольку $\sigma(a) \neq \varnothing$, элемент $a - \lambda 1$ необратим для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Следовательно, $a - \lambda 1 = 0$, т.е. $a = \lambda 1$. Ввиду произвольности элемента $a \in A$ получаем $A = \mathbb{C}1$, как и требовалось. □

Замечание 15.5. Теорема Гельфанда–Мазура имеет следующую разновидность для банаховых алгебр над $\mathbb{R}$: *ненулевая банахова $\mathbb{R}$-алгебра с делением изоморфна либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо телу кватернионов $\mathbb{H}$.* В такой формулировке теорема Гельфанда–Мазура обобщает классическую теорему Фробениуса о конечномерных $\mathbb{R}$-алгебрах с делением. Доказательство можно прочитать, например, в книге C. E. Rickart, “General Theory of Banach Algebras”.