А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 12

12.1. Теорема Банаха об открытом отображении

Напомним (см. следствие 2.4), что любой открытый линейный оператор $T\colon X \to Y$ между нормированными пространствами X и Y сюръективен. Теорема Банаха, которую нам предстоит доказать, утверждает, что в случае банаховых пространств верно и обратное.

Теорема 12.1 (об открытом отображении)**.** *Пусть X и Y — банаховы пространства и $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ — сюръективный линейный оператор. Тогда T открыт.*

Теорему об открытом отображении удобно доказывать в два этапа. На первом этапе будет использоваться полнота Y, а на втором — полнота X.

Прежде чем вводить следующее понятие, напомним (см. предложение 2.3), что линейный оператор $T\colon X \to Y$ открыт тогда и только тогда, когда $T(\mathbb{B}_1^\circ) \supseteq \mathbb{B}_r^\circ$ для некоторого $r > 0$.

Определение 12.1. Пусть X и Y — нормированные пространства. Линейный оператор $T\colon X \to Y$ называется *почти открытым*, если $\overline{T(\mathbb{B}_1^\circ)} \supseteq \mathbb{B}_r^\circ$ для некоторого $r > 0$.

Лемма 12.2. *Пусть X — нормированное пространство, Y — банахово пространство и $T\colon X \to Y$ — сюръективный линейный оператор. Тогда T почти открыт.*

Доказательство. Очевидно, множество $\overline{T(\mathbb{B}_1^\circ)}$ абсолютно выпукло и замкнуто, а из сюръективности T следует, что оно поглощающее. Следовательно, это множество — бочка, и для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой 11.5. □

Лемма 12.3. *Пусть X — банахово пространство, Y — нормированное пространство и $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ — линейный оператор. Предположим, что $\overline{T(\mathbb{B}_1^\circ)} \supseteq \mathbb{B}_r^\circ$ для некоторого $r > 0$. Тогда $T(\mathbb{B}_1^\circ) \supseteq \mathbb{B}_r^\circ$.*

Доказательство. Из условия очевидным образом следует, что для любого $s > 0$ справедливо включение

$$\mathbb{B}_s^\circ \subseteq \overline{T(\mathbb{B}_{r^{-1}s}^\circ)}. \tag{12.1}$$

Возьмем любой элемент $y \in \mathbb{B}_r^\circ \subset Y$ и зафиксируем число ρ так, чтобы $\|y\| < \rho < r$. Положим $\varepsilon = r - \rho$. Поскольку $y \in \mathbb{B}_\rho^\circ$, из (12.1) следует, что $\|y - Tx_1\| < \varepsilon/2$ для некоторого $x_1 \in \mathbb{B}_{r^{-1}\rho}^\circ$. Применяя (12.1) к $s = \varepsilon/2$, подберем $x_2 \in \mathbb{B}_{r^{-1}\varepsilon/2}^\circ$ так, чтобы выполнялось неравенство $\|y - Tx_1 - Tx_2\| < \varepsilon/4$. Продолжая в том же духе, получим последовательность (x_n) в X, удовлетворяющую условиям

$$x_1 \in \mathbb{B}_{r^{-1}\rho}^\circ, \quad x_n \in \mathbb{B}_{r^{-1}\varepsilon/2^{n-1}}^\circ \quad (n \geqslant 2), \tag{12.2}$$

$$\|y - Tx_1 - \ldots - Tx_n\| < \varepsilon/2^n. \tag{12.3}$$

Из (12.2) заключаем, что

$$\sum_n \|x_n\| < r^{-1}(\rho + \varepsilon/2 + \varepsilon/4 + \cdots) = r^{-1}(\rho + \varepsilon) = 1.$$

Отсюда с учетом полноты X следует, что ряд $\sum_n x_n$ сходится к некоторому элементу $x \in X$, причем $\|x\| \leqslant \sum_n \|x_n\| < 1$, т.е. $x \in \mathbb{B}_1^\circ$. Из (12.3) при $n \to \infty$ следует, что $y = Tx$. Тем самым мы показали, что $T(\mathbb{B}_1^\circ) \supseteq \mathbb{B}_r^\circ$, как и требовалось. $\square$

Следствие 12.4. *Пусть X — банахово пространство, Y — нормированное пространство и $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ — почти открытый линейный оператор. Тогда T открыт.*

Теперь, чтобы доказать теорему 12.1, достаточно объединить лемму 12.2 и следствие 12.4.

Выведем теперь несколько важных следствий из теоремы об открытом отображении. На самом деле (см. листок 9) нетрудно показать, что все эти следствия на самом деле эквивалентны теореме об открытом отображении.

Теорема 12.5 (об обратном операторе)**.** *Пусть X и Y — банаховы пространства и $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ — биективный оператор. Тогда T — топологический изоморфизм.*

Теорема 12.6. *Пусть X и Y — банаховы пространства. Линейный оператор $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ топологически инъективен тогда и только тогда, когда он инъективен и имеет замкнутый образ.*

Доказательство. Если T топологически инъективен, то пространство $\operatorname{Im} T$ топологически изоморфно X, а значит, полно и поэтому замкнуто в Y. Для доказательства обратного утверждения достаточно применить теорему 12.5 к оператору $T\colon X \to \operatorname{Im} T$. $\square$

Прежде чем формулировать следующее утверждение, напомним, что для любых множеств X и Y *графиком* отображения $T\colon X \to Y$ называется множество

$$\Gamma_T = \{(x, Tx) : x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

Если X и Y — векторные пространства, а T — линейный оператор, то легко видеть, что Γ_T — векторное подпространство в $X \oplus Y$. Отметим, что Γ_T является ядром линейного оператора

$$X \oplus Y \to Y, \quad (x, y) \mapsto y - Tx.$$

Отсюда немедленно следует, что если X и Y — нормированные пространства, а оператор $T\colon X \to Y$ непрерывен, то Γ_T — замкнутое подпространство в $X \oplus Y$.

Теорема 12.7 (о замкнутом графике)**.** *Пусть X и Y — банаховы пространства и $T\colon X \to Y$ — линейный оператор, график которого замкнут в $X \oplus Y$. Тогда T непрерывен.*

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & \Gamma_T \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X \arrow[rr, "T"] & & Y, \end{tikzcd}$$

в которой отображения p_1 и p_2 заданы формулами $p_1(x, y) = x$ и $p_2(x, y) = y$. Очевидно, p_1 и p_2 — непрерывные линейные операторы, причем p_1 биективен. Поскольку X и Y — банаховы пространства, такова же и их прямая сумма $X \oplus Y$ (см. предложение 3.15), а вместе с ней и замкнутое подпространство $\Gamma_T \subseteq X \oplus Y$. Таким образом, к оператору p_1 применима теорема 12.5, из которой следует, что оператор $T = p_2 p_1^{-1}$ непрерывен. $\square$

Чтобы ощутить пользу от теоремы о замкнутом графике, полезно переформулировать ее на языке последовательностей.

Теорема 12.8 (о замкнутом графике)**.** *Пусть X и Y — банаховы пространства и $T\colon X \to Y$ — линейный оператор. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *T непрерывен;*
(ii) *если последовательность (x_n) стремится к нулю в X, а последовательность (Tx_n) стремится к $y \in Y$, то $y = 0$.*

Доказательство. Условие (ii), как нетрудно проверить (проверьте), равносильно замкнутости графика Γ_T в $X \oplus Y$. $\square$

Замечание 12.1. Если мы хотим проверить непрерывность какого-то линейного оператора $T\colon X \to Y$ (или, эквивалентно, его непрерывность в нуле) по определению, то мы должны взять стремящуюся к нулю последовательность (x_n) в X и доказать, что последовательность (Tx_n) стремится к нулю в Y. Теорема 12.8 показывает, что мы можем при этом предполагать, что последовательность (Tx_n) имеет предел в Y. В ряде случаев это существенно облегчает жизнь при доказательстве непрерывности операторов.

12.2. Топологические прямые суммы и дополняемые подпространства

Определение 12.2. Говорят, что нормированное пространство X *разлагается в топологическую прямую сумму* векторных подпространств $X_0, X_1 \subseteq X$, если отображение

$$X_0 \oplus_1 X_1 \to X, \quad (x_0, x_1) \mapsto x_0 + x_1, \tag{12.4}$$

— топологический изоморфизм. В этом случае пишут $X = X_0 \oplus_{\mathrm{top}} X_1$.

Наблюдение 12.9. Заметим, что отображение (12.4) всегда непрерывно, а его биективность равносильна равенству $X = X_0 \oplus X_1$ (понимаемому в обычном алгебраическом смысле). Поэтому условие $X = X_0 \oplus_{\mathrm{top}} X_1$ равносильно выполнению следующих двух условий:

(i) $X = X_0 \oplus X_1$;
(ii) существует такое $C > 0$, что $\|x_0\| + \|x_1\| \leqslant C\|x_0 + x_1\|$ для всех $x_0 \in X_0,\ x_1 \in X_1$.

Наблюдение 12.10. Разумеется, в формуле (12.4) вместо ℓ^1-суммы $X_0 \oplus_1 X_1$ можно брать ℓ^p-сумму $X_0 \oplus_p X_1$ для любого $p \in [1, +\infty]$; см замечание 3.1.

Удобно переформулировать определение 12.2 в несколько иных терминах. Для этого сначала вспомним следующий простой факт из линейной алгебры.

Предложение 12.11. *Пусть X — векторное пространство. Следующие свойства линейного оператора $P\colon X \to X$ эквивалентны:*

(i) $P^2 = P$;

(ii) *существуют такие векторные подпространства $X_0, X_1 \subseteq X$, что $X = X_0 \oplus X_1$, $P|_{X_0} = \mathbf{1}_{X_0}$ и $P|_{X_1} = 0$.*

При этом, если подпространства $X_0, X_1 \subseteq X$ таковы, как в п. (ii), *то $X_0 = \operatorname{Im} P$ и $X_1 = \operatorname{Ker} P$.*

Если Вы не встречались раньше с этим утверждением, обязательно докажите его в качестве упражнения.

Определение 12.3. Линейный оператор P, удовлетворяющий условиям предложения 12.11, называется *проектором* на X_0 вдоль X_1.

Наблюдение 12.12. Если P — проектор на X_0 вдоль X_1, то $\mathbf{1}_X - P$ — проектор на X_1 вдоль X_0.

Предложение 12.13. *Пусть X — нормированное пространство, $X_0, X_1 \subseteq X$ — векторные подпространства и $X = X_0 \oplus X_1$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $X = X_0 \oplus_{\mathrm{top}} X_1$;

(ii) *проектор на X_0 вдоль X_1 ограничен;*

(iii) *проектор на X_1 вдоль X_0 ограничен.*

Доказательство. Эквивалентность условий (ii) и (iii) следует из наблюдения 12.12. Обозначим проектор на X_0 вдоль X_1 через P. Если выполнено условие (i), то норма на X эквивалентна норме $\|x_0 + x_1\|_1 = \|x_0\| + \|x_1\|$ (где $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$), а относительно этой нормы проектор P, очевидно, ограничен. Обратно, если известно, что P ограничен, то оператор

$$X \to X_0 \oplus_1 X_1, \quad x \mapsto \big(Px, (\mathbf{1}_X - P)x\big),$$

также ограничен и является, очевидно, обратным к (12.4). ☐

Следствие 12.14. *Если X — нормированное пространство и $X = X_0 \oplus_{\mathrm{top}} X_1$, то подпространства X_0 и X_1 замкнуты в X.*

Доказательство. Пусть P — проектор на X_0 вдоль X_1. Тогда $X_1 = \operatorname{Ker} P$ и $X_0 = \operatorname{Ker}(\mathbf{1}_X - P)$. ☐

Для банаховых пространств следствие 12.14 можно обратить:

Предложение 12.15. *Пусть X — банахово пространство, $X_0, X_1 \subseteq X$ — замкнутые векторные подпространства и $X = X_0 \oplus X_1$. Тогда $X = X_0 \oplus_{\mathrm{top}} X_1$.*

Доказательство. Достаточно применить к (12.4) теорему Банаха 12.5. ☐

Рассмотрим теперь следующий вопрос. Предположим, что даны нормированное пространство X и векторное подпространство $X_0 \subseteq X$. Всегда ли существует такое векторное подпространство $X_1 \subseteq X$, что $X = X_0 \oplus_{\mathrm{top}} X_1$? Забегая вперед, предупредим, что в общем случае ответ отрицателен, даже если X банахово и X_0 замкнуто в X. Для ситуации же, когда ответ положителен, есть специальная терминология:

Определение 12.4. Векторное подпространство X_0 нормированного пространства X называется *дополняемым* в X, если существует такое векторное подпространство $X_1 \subseteq X$, что $X = X_0 \oplus_{\mathrm{top}} X_1$.

Наблюдение 12.16. Согласно следствию 12.14, любое дополняемое подпространство замкнуто в X.

Пример 12.1. Из теоремы 5.9 об ортогональном дополнении следует, что каждое замкнутое подпространство гильбертова пространства дополняемо.

Чтобы проверять дополняемость, удобно иметь несколько ее эквивалентных определений.

Теорема 12.17. *Пусть X — нормированное пространство. Следующие свойства замкнутого векторного подпространства $X_0 \subseteq X$ эквивалентны:*

(i) *X_0 дополняемо в X;*
(ii) *X_0 является образом некоторого ограниченного проектора $P \in \mathscr{B}(X)$;*
(iii) *существует непрерывный линейный оператор $S\colon X/X_0 \to X$, удовлетворяющий условию $Q \circ S = \mathbf{1}_{X/X_0}$, где $Q\colon X \to X/X_0$ — фактороотображение.*

Доказательство. (i) $\iff$ (ii): немедленно следует из предложения 12.13.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Из универсального свойства факторпространств (теорема 3.4) следует, что существует единственный оператор $S \in \mathscr{B}(X/X_0, X)$, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathbf{1}_X - P"] \arrow[d, "Q"'] & X \\ X/X_0 \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативной, т.е. удовлетворяющий условию $SQ = \mathbf{1}_X - P$. Умножая слева на Q и учитывая, что $QP = 0$, получаем равенства

$$QSQ = Q - QP = Q. \tag{12.5}$$

Но Q — сюръекция, поэтому из (12.5) следует, что $QS = \mathbf{1}_{X/X_0}$, как и требовалось.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii). Заметим, что $(SQ)^2 = SQ$, т.е. SQ — проектор в X. Следовательно, оператор $P = \mathbf{1}_X - SQ$ — тоже проектор в X. Далее, из (iii) следует, что S инъективен, поэтому $\operatorname{Ker} SQ = \operatorname{Ker} Q = X_0$. Следовательно, $\operatorname{Im} P = X_0$, и P — искомый проектор. $\square$

Приведем теперь два простых, но важных примера дополняемых подпространств.

Предложение 12.18. *Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subseteq X$ — конечномерное подпространство. Тогда X_0 дополняемо в X.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в X_0 и $f_1, \ldots, f_n$ — соответствующий дуальный базис в X_0^*, т.е. набор функционалов, однозначно определенных условием $f_i(e_j) = \delta_{ij}$. Заметим, что $f_1, \ldots, f_n$ непрерывны ввиду конечномерности X_0 (см. предложение 1.5

или задачу 2.9 из листка). Продолжим их до непрерывных линейных функционалов $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n$ на X (см. следствие 9.4). Тогда оператор

$$P\colon X \to X, \quad P(x) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_i(x) e_i,$$

является ограниченным проектором на X_0. Остается воспользоваться теоремой 12.17. $\square$

Предложение 12.19. *Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subseteq X$ — замкнутое подпространство конечной коразмерности. Тогда X_0 дополняемо в X.*

Доказательство. Обозначим через $Q\colon X \to X/X_0$ факторотображение и выберем элементы $x_1, \ldots, x_n \in X$ так, чтобы векторы $e_i = Q(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ образовывали базис в X/X_0. Зададим линейное отображение $S\colon X/X_0 \to X$ формулой $S(e_i) = x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда, очевидно, $Q \circ S = \mathbf{1}_{X/X_0}$, и из конечномерности X/X_0 следует, что S непрерывно (см. предложение 1.5 или задачу 2.9 из листка). Остается воспользоваться теоремой 12.17. $\square$

А вот и контрпример:

Упражнение 12.1. Докажите, что c_0 недополняемо в ℓ^∞.

Указание. Можно действовать следующим образом:

1) Докажите, что $\mathbb{N}$ можно представить в виде несчетного объединения $\mathbb{N} = \bigcup_{i\in I} A_i$ счетных множеств A_i так, что $A_i \cap A_j$ конечно при $i \neq j$. (Подсказка: вместо $\mathbb{N}$ удобнее брать $\mathbb{Q}$).
2) Докажите, что для каждого $f \in (\ell^\infty)^*$, обращающегося в нуль на c_0, множество тех $i \in I$, для которых $f(\chi_{A_i}) \neq 0$, не более чем счетно.
3) Докажите, что на ℓ^∞/c_0 не существует счетного множества непрерывных линейных функционалов, разделяющего точки.
4) Докажите, что c_0 недополняемо в ℓ^∞.

На самом деле наличие недополняемых подпространств — закономерность, а не патология. Как показали Линденштраусс и Цафрири в 1971 г., если в банаховом пространстве X каждое замкнутое подпространство дополняемо, то X топологически изоморфно гильбертову пространству.