А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ
Лекция 10

10.1. Теорема Рисса

Мы уже знаем, как устроены пространства, сопряженные к гильбертову пространству (теорема 7.3) и к пространству L^p (теорема 8.7). Наша ближайшая цель — описать пространство, сопряженное к пространству $C(X)$ непрерывных функций на компакте X. Сразу оговоримся, что соответствующая теорема для произвольного компакта будет лишь сформулирована; докажем мы ее в частном случае, когда X — отрезок на вещественной прямой.

10.1.1. Интегрирование по комплексной мере. Теорема Рисса–Маркова–Какутани

Наша ближайшая цель — научиться интегрировать функции по произвольной (вообще говоря, комплексной) мере. Для наших целей достаточно уметь интегрировать лишь ограниченные функции; этим случаем мы и ограничимся.

Пусть X — множество и $\mathscr{A}$ — алгебра его подмножеств. Обозначим через $B_{\mathscr{A}}(X)$ множество всех ограниченных $\mathscr{A}$-измеримых функций из X в $\mathbb{K}$ (как обычно, мы полагаем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Множество $B_{\mathscr{A}}(X)$ является векторным подпространством в $\ell^\infty(X)$ и, следовательно, может рассматриваться как нормированное пространство относительно равномерной нормы.

Напомним, что для $A \subseteq X$ через χ_A мы обозначаем характеристическую функцию множества A (т.е. функцию, равную 1 на A и 0 вне A). Положим

$$S_{\mathscr{A}}(X) = \operatorname{span}\{\chi_A : A \in \mathscr{A}\} \subset B_{\mathscr{A}}(X).$$

Функции из $S_{\mathscr{A}}(X)$ называются *$\mathscr{A}$-простыми.*

Доказательство следующего факта — простое упражнение.

Предложение 10.1. *Подпространство $S_{\mathscr{A}}(X)$ плотно в $B_{\mathscr{A}}(X)$.*

Через $M(\mathscr{A})$ мы будем обозначать множество всех $\mathbb{K}$-значных мер на $\mathscr{A}$ (не обязательно σ-аддитивных), имеющих ограниченную вариацию. Легко убедиться (убедитесь!), что $M(\mathscr{A})$ — векторное пространство относительно поточечных операций, и что формула $\|\mu\| = |\mu|(X)$ задает норму на $M(\mathscr{A})$.

Предложение 10.2. *Для каждой меры $\mu \in M(\mathscr{A})$ существует единственный функционал $I_\mu \in B_{\mathscr{A}}(X)^*$, удовлетворяющий условию $I_\mu(\chi_A) = \mu(A)$ для каждого $A \in \mathscr{A}$. При этом $\|I_\mu\| = \|\mu\|$.*

Определение 10.1. Для любой функции $f \in B_{\mathscr{A}}(X)$ величина $I_\mu(f)$ называется *интегралом f по μ* и обозначается $\int_X f(x)\, d\mu(x)$.

Схема доказательства предложения 10.2. На пространстве $S_{\mathscr{A}}(X)$ линейный функционал I_μ определяется очевидным и единственно возможным способом. Нетрудно убедиться (убедитесь), что I_μ ограничен и $\|I_\mu\| = \|\mu\|$. Остается воспользоваться предложением 10.1 и теоремой 4.1 о продолжении по непрерывности. $\square$

Следующая теорема показывает, что других непрерывных линейных функционалов на $B_{\mathscr{A}}(X)$, кроме описанных в предложении 10.2, не бывает.

Теорема 10.3 (Хильдебрандт, Канторович)**.** *Отображение*

$$M(\mathscr{A}) \to B_{\mathscr{A}}(X)^*, \quad \mu \mapsto I_\mu,$$

— изометрический изоморфизм.

Схема доказательства. Изометричность указанного отображения уже установлена в предложении 10.2. Для доказательства его сюръективности возьмем $F \in B_{\mathscr{A}}(X)^*$ и для каждого $A \in \mathscr{A}$ положим $\mu(A) = F(\chi_A)$. Нетрудно проверить (проверьте), что $\mu \in M(\mathscr{A})$. Применяя предложение 10.2, получаем $F = I_\mu$. $\square$

Следствие 10.4. *Отображение $\mu \mapsto I_\mu$ устанавливает изометрический изоморфизм между $M(2^{\mathbb{N}})$ и $(\ell^\infty)^*$.*

Замечание 10.1. Отметим, что пространство ℓ^1 изометрически вкладывается в $M(2^{\mathbb{N}})$: каждой последовательности $x \in \ell^1$ отвечает мера $\mu_x(A) = \sum_{n\in A} x_n$. Таким образом, пространство $M(2^{\mathbb{N}})$, сопряженное к ℓ^∞, содержит в себе ℓ^1, однако не совпадает с ℓ^1 (ср. предостережение 7.4). Через некоторое время мы дадим общую интерпретацию явлениям такого рода.

Пусть теперь X — компактное хаусдорфово топологическое пространство. Обозначим через $\mathscr{B}or(X)$ его борелевскую σ-алгебру, т.е. наименьшую σ-алгебру, содержащую все открытые подмножества X.

Определение 10.2. *Борелевская мера* на X — это σ-аддитивная комплексная мера на $\mathscr{B}or(X)$.

Среди всех борелевских мер выделяют те, которые «хорошо согласованы» с топологией:

Определение 10.3. Борелевская мера μ на X называется *регулярной* (или *мерой Радона*), если для каждого борелевского множества $B \subseteq X$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдутся открытое множество $U \supseteq B$ и компактное множество $K \subseteq B$ такие, что $|\mu|(U \setminus K) < \varepsilon$.

Замечание 10.2. Известно, что если компакт X метризуем, то любая борелевская мера на X регулярна (см., например, В. И. Богачев, «Теория меры», М.: РХД, 2003). Пользоваться этим фактом мы не будем.

Обозначим через $M(X)$ подмножество в $M(\mathscr{B}or(X))$, состоящее из регулярных мер. Нетрудно проверить (проверьте), что $M(X)$ — векторное подпространство в $M(\mathscr{B}or(X))$.

Теорема 10.5 (Рисс, Марков, Какутани)**.** *Отображение*

$$M(X) \to C(X)^*, \qquad \mu \mapsto I_\mu,$$
$$\text{где } I_\mu(f) = \int_X f\, d\mu \qquad (f \in C(X))$$

— изометрический изоморфизм.

Теорема Рисса–Маркова–Какутани имеет долгую историю. Ее первоначальную версию доказал Ф. Рисс в 1909 г. для случая, когда X — отрезок вещественной прямой. Интеграл Лебега в то время еще не существовал, поэтому в первоначальной формулировке теоремы Рисса меры как таковые отсутствуют, а вместо интеграла Лебега используется интеграл Римана–Стилтьеса. В 1919 г. И. Радон обобщил теорему Рисса на случай компактов в $\mathbb{R}^n$. В 1937–1938 гг. С. Банах и С. Сакс доказали ее для метризуемых компактов. Наконец, в общем случае теорема 10.5 была доказана А. А. Марковым в 1938 г. и С. Какутани в 1941 г. (так что правильнее было бы называть ее «теоремой Рисса–Радона–Банаха–Сакса–Маркова–Какутани»).

Доказательство теоремы 10.5 (в отличие от сходной по формулировке теоремы 10.3 Хильдебрандта–Канторовича) довольно нетривиально. С ним можно познакомиться, например, по книге Н. Данфорда и Дж. Шварца «Линейные операторы», т. I, М.: ИЛ, 1962. Существует также альтернативное и существенно более короткое доказательство, основанное, однако, на ином подходе к теории интегрирования (так называемой схеме Даниэля); см. по этому поводу второй том цитированной выше книги В. И. Богачева.

Мы докажем теорему 10.5 в частном случае, когда X — отрезок вещественной прямой, т.е. фактически в той же общности, в какой ее доказал Рисс, но с использованием более современной терминологии. Для этого нам понадобятся некоторые конструкции из действительного анализа.

10.1.2. Функции ограниченной вариации. Теорема Рисса

Определение 10.4. *Вариацией* функции $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ на отрезке $[a,b]$ называется величина

$$V_a^b(\varphi) = \sup\Big\{\sum_{i=1}^n |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| : a = t_0 < \ldots < t_n = b,\ n \in \mathbb{N}\Big\} \in [0,+\infty].$$

Предложение 10.6. *Если $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$, то $V_a^y(\varphi) = V_a^x(\varphi) + V_x^y(\varphi)$.*

Доказательство. Упражнение. □

Определение 10.5. Функция $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ называется *функцией ограниченной вариации*, если $V_a^b(\varphi) < \infty$.

Множество всех функций ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$ будем обозначать через $BV[a,b]$. Нетрудно проверить (проверьте), что $BV[a,b]$ — векторное подпространство в пространстве всех функций на $[a,b]$, и что V_a^b — полунорма на $BV[a,b]$.

Пример 10.1. Любая монотонно неубывающая функция $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию, и $V_a^b(\varphi) = \varphi(b) - \varphi(a)$.

Пример 10.2. Из теоремы Лагранжа легко следует, что любая $\varphi \in C^1[a,b]$ имеет ограниченную вариацию. С другой стороны, существуют непрерывные (и даже дифференцируемые) функции неограниченной вариации (см. листок 8).

Предложение 10.7. *Функция $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда она является разностью двух монотонно неубывающих функций.*

Схема доказательства. Достаточность очевидна (см. пример 10.1). Для доказательства необходимости положим $v_1(x) = V_a^x(\varphi)$ и $v_2 = v_1 - \varphi$. Из предложения 10.6 следует, что v_1 монотонна. Монотонность v_2 также легко вывести из предложения 10.6. □

Следствие 10.8. *Множество точек разрыва функции $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ ограниченной вариации не более чем счетно, и все они являются разрывами 1-го рода (т.е. в каждой точке φ имеет пределы слева и справа).*

Доказательство. Если φ монотонна, то это утверждение — хорошо известное упражнение по действительному анализу. Если $\varphi \in BV[a,b]$ вещественна, то утверждение следует из предложения 10.7. Общий случай сводится к рассмотрению действительной и мнимой частей функции φ. □

Установим теперь взаимосвязь между функциями ограниченной вариации и мерами на отрезке. Положим

$$BV_0[a,b] = \{\varphi \in BV[a,b] : \varphi(a) = 0,\ \varphi \text{ непрерывна справа на } (a,b)\}.$$

Очевидно, $BV_0[a,b]$ — векторное подпространство в $BV[a,b]$, и $\|\varphi\| = V_a^b(\varphi)$ — норма на $BV_0[a,b]$.

Определение 10.6. *Функцией распределения* меры $\mu \in M[a,b]$ называется функция

$$\varphi_\mu\colon [a,b] \to \mathbb{K}, \quad \varphi_\mu(t) = \begin{cases} \mu([a,t]) & \text{при } t > a, \\ 0 & \text{при } t = a. \end{cases}$$

Предложение 10.9. *$\varphi_\mu \in BV_0[a,b]$, и $V_a^b(\varphi_\mu) = \|\mu\|$.*

Схема доказательства. Обозначим через $\mathscr{A}$ алгебру подмножеств $[a,b]$, порожденную отрезками вида $[a,t]$, где $a < t \leqslant b$. Легко видеть, что $\mathscr{A}$ состоит из всевозможных дизъюнктных объединений конечного числа множеств вида $(\alpha,\beta]$ (где $a < \alpha \leqslant \beta \leqslant b$) и $[a,t]$ (где $a < t \leqslant b$). Пусть $\mu_{\mathscr{A}}$ — ограничение меры μ на алгебру $\mathscr{A}$. Из определений вариации меры и функции немедленно следует, что $V_a^b(\varphi_\mu) = |\mu_{\mathscr{A}}|([a,b])$. В частности, φ_μ — функция ограниченной вариации. С другой стороны, из регулярности μ следует, что для каждого борелевского множества $B \subseteq [a,b]$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $A \in \mathscr{A}$, что $|\mu|(A \triangle B) < \varepsilon$. Отсюда нетрудно вывести (сделайте это), что $|\mu_{\mathscr{A}}|([a,b]) = |\mu|([a,b]) = \|\mu\|$. Следовательно, $V_a^b(\varphi_\mu) = \|\mu\|$, как и требовалось. Непрерывность φ_μ справа на (a,b) легко выводится из σ-аддитивности меры μ. □

Итак, каждой мере на отрезке мы сопоставили некоторую функцию ограниченной вариации. В итоге получилось изометрическое линейное отображение

$$M[a,b] \to BV_0[a,b], \qquad \mu \mapsto \varphi_\mu. \tag{10.1}$$

Покажем теперь, что это отображение биективно.

Предложение 10.10. *Для каждой функции $\varphi \in BV_0[a,b]$ существует единственная мера $\mu_\varphi \in M[a,b]$, удовлетворяющая условию $\mu_\varphi([a,t]) = \varphi(t)$ для всех $t > a$ (т.е. мера, функция распределения которой совпадает с φ).*

Схема доказательства. Единственность меры μ_φ следует из изометричности отображения (10.1). Для доказательства ее существования рассмотрим алгебру множеств $\mathscr{A}$, использованную в доказательстве предложения 10.9, и зададим меру μ_φ на $\mathscr{A}$ формулами

$$\mu_\varphi((\alpha,\beta]) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) \qquad (a < \alpha \leqslant \beta \leqslant b);$$
$$\mu_\varphi([a,t]) = \varphi(t) \qquad (a < t \leqslant b).$$

Очевидно, μ_φ — мера на $\mathscr{A}$. Из непрерывности справа функции φ на (a,b) нетрудно вывести, что μ_φ σ-аддитивна. Согласно теореме о продолжении меры (см. курс анализа), μ_φ единственным образом продолжается до σ-аддитивной меры на σ-алгебре μ_φ-измеримых множеств, содержащей в себе борелевскую σ-алгебру $\mathscr{B}or([a,b])$. Регулярность μ_φ проверяется точно так же, как и для обычной меры Лебега. □

Определение 10.7. Мера μ_φ, построенная в предложении 10.10, называется *мерой Лебега–Стилтьеса.*

Пример 10.3. Если $\varphi(t) = t$ для всех $t \in [a,b]$, то μ_φ — это мера Лебега. Если $\varphi = \chi_{(a,b]}$, то μ_φ — это *мера Дирака* δ_a, заданная формулой

$$\delta_a(B) = \begin{cases} 1 & \text{при } a \in B, \\ 0 & \text{при } a \notin B. \end{cases}$$

Объединяя предложения 10.9 и 10.10, получаем следующую теорему.

Теорема 10.11. *Отображения*

$$M[a,b] \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} BV_0[a,b]\ ,$$
$$\alpha(\mu) = \varphi_\mu, \quad \beta(\varphi) = \mu_\varphi,$$

— взаимно обратные изометрические изоморфизмы.

Теперь мы почти готовы к доказательству теоремы Рисса. Следующая несложная лемма позволяет «нормализовать» произвольную функцию ограниченной вариации, т.е. сделать ее непрерывной справа на интервале (a,b).

Лемма 10.12. *Пусть $\varphi \in BV[a,b]$. Положим*

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(t+0), & \text{если } a < t < b; \\ \varphi(t), & \text{если } t = a \text{ или } t = b. \end{cases} \tag{10.2}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) $\psi \in BV[a,b]$;
(ii) $V_a^b(\psi) \leqslant V_a^b(\varphi)$;

(iii) *ψ непрерывна справа на (a,b).*

Доказательство. Упражнение. □

Теорема 10.13 (Рисс)**.** *Отображение*

$$M[a,b] \to C[a,b]^*, \qquad \mu \mapsto I_\mu, \tag{10.3}$$

$$\text{где } I_\mu(f) = \int_{[a,b]} f\,d\mu \qquad (f \in C[a,b])$$

— изометрический изоморфизм.

Доказательство. Докажем сначала инъективность отображения (10.3). Предположим, что $I_\mu = 0$. Зафиксируем произвольный промежуток $J \subseteq [a,b]$ и построим последовательность функций (f_n) в $C[a,b]$, удовлетворяющих условию $0 \leqslant f_n \leqslant 1$ и поточечно сходящуюся к функции χ_J. Применяя теорему Лебега о мажорированной сходимости, получаем

$$\mu(J) = \int_{[a,b]} \chi_J\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n\,d\mu = 0.$$

Отсюда с учетом регулярности μ следует, что $\mu = 0$. Следовательно, (10.3) — инъекция.

Покажем теперь, что отображение (10.3) сюръективно и изометрично. Зафиксируем произвольный $F \in C[a,b]^*$ и, пользуясь теоремой Хана–Банаха, продолжим его до функционала $\tilde F \in \ell^\infty([a,b])^*$ так, чтобы $\|\tilde F\| = \|F\|$. Определим функцию $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ формулой

$$\varphi(t) = \begin{cases} \tilde F(\chi_{[a,t]}) & \text{при } t > a,\\ 0 & \text{при } t = a. \end{cases}$$

Покажем, что $\varphi \in BV[a,b]$. Для этого возьмем разбиение $a = t_0 < \ldots < t_n = b$ отрезка $[a,b]$ и для каждого $i = 1,\ldots,n$ найдем $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $|\lambda_i| = 1$, так, чтобы

$$|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| = \lambda_i(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| &= \lambda_1 \tilde F(\chi_{[a,t_1]}) + \sum_{i=2}^n \lambda_i \tilde F(\chi_{(t_{i-1},t_i]})\\ &= \tilde F(\lambda_1\chi_{[a,t_1]} + \sum_{i=2}^n \lambda_i \chi_{(t_{i-1},t_i]}) \leqslant \|\tilde F\| = \|F\|.\end{aligned}$$

Следовательно, $\varphi \in BV[a,b]$, и $V_a^b(\varphi) \leqslant \|F\|$. Определим теперь функцию $\psi\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ формулой (10.2). Согласно лемме 10.12, $\psi \in BV_0[a,b]$ и $V_a^b(\psi) \leqslant V_a^b(\varphi) \leqslant \|F\|$.

Положим теперь $\mu = \mu_\psi \in M[a,b]$. Мы утверждаем, что $F = I_\mu$. В самом деле, пусть A — множество точек непрерывности функции φ на $(a,b]$. В силу следствия 10.8, множество $[a,b] \setminus A$ не более чем счетно. Для любых $\alpha, \beta \in A$, $\alpha < \beta$, имеем

$$\int_{[a,b]} \chi_{(\alpha,\beta]}\,d\mu = \mu((\alpha,\beta]) = \psi(\beta) - \psi(\alpha) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = \tilde F(\chi_{(\alpha,\beta]}).$$

Аналогично проверяется, что

$$\int_{[a,b]} \chi_{[a,\beta]}\, d\mu = \tilde{F}(\chi_{[a,\beta]}).$$

Следовательно, функционалы $\tilde{F}$ и I_μ совпадают на подпространстве

$$S = \operatorname{span}\{\chi_{(\alpha,\beta]},\ \chi_{[a,\beta]} : a < \alpha < \beta \leqslant b,\ \alpha,\beta \in A\} \subset \ell^\infty([a,b]).$$

С другой стороны, замыкание S в $\ell^\infty([a,b])$ содержит $C[a,b]$ (почему?). Отсюда получаем требуемое равенство $F = I_\mu$. Наконец,

$$\|\mu\| = V_a^b(\psi) \leqslant \|F\| = \|I_\mu\| \leqslant \|\mu\|,$$

поэтому $\|\mu\| = \|F\|$. Следовательно, (10.3) — изометрический изоморфизм. $\square$

Замечание 10.3. Вы, вероятно, заметили, что «трудная» часть теоремы Рисса — это доказательство сюръективности отображения $M[a,b] \to C[a,b]^*$. То же самое относится и к более общей теореме Рисса–Маркова–Какутани. Может возникнуть искушение доказать сюръективность этого отображения следующим образом. Начнем так же, как и в приведенном выше доказательстве теоремы Рисса, а именно, продолжим произвольный функционал $F \in C(X)^*$ до функционала $\tilde{F} \in \ell^\infty(X)^*$, имеющего ту же норму, а затем определим борелевскую меру μ на X формулой $\mu(A) = \tilde{F}(\chi_A)$. Проблема в том, что так определенная мера вовсе не обязана быть ни σ-аддитивной, ни регулярной, и приходится как-то ее «подправлять». Для отрезка нам удалось это сделать с помощью функций ограниченной вариации: дело в том, что «подправить» функцию ограниченной вариации так, чтобы она задавала именно σ-аддитивную меру, не составляет труда — надо применить лемму 10.12.

Отметим также, что для произвольного компакта X оператор, сопряженный к вложению $C(X)$ в пространство $B(X) = B_{\mathscr{B}or(X)}(X)$ ограниченных борелевских функций на X, может быть отождествлен (в силу теорем Хильдебрандта–Канторовича и Рисса–Маркова–Какутани) с некоторым оператором из $M(\mathscr{B}or(X))$ в $M(X)$. Нетрудно проверить, что этот оператор тождествен на $M(X)$, т.е. является проектором, который в некотором смысле «регуляризует» каждую меру ограниченной вариации.