А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 9

Считается, что классический функциональный анализ стоит на «трех китах» — на трех фундаментальных теоремах. Это теорема Хана–Банаха, теорема Банаха об обратном операторе и теорема Банаха–Штейнгауза. Наша ближайшая цель — познакомиться с первым из этих «китов».

9.1. Теорема Хана–Банаха

Чтобы понятия сопряженного пространства и сопряженного оператора были содержательными, хотелось бы, чтобы на каждом нормированном пространстве имелось достаточно много (в каком-либо разумном смысле) ограниченных линейных функционалов. Мы уже видели, что сопряженные пространства к гильбертову пространству и к пространствам L^p довольно обширны. А что происходит в общем случае? Если задуматься, то совершенно непонятно, почему на произвольном нормированном пространстве вообще должны существовать ограниченные линейные функционалы (кроме нулевого). На самом деле они действительно существуют, и их «достаточно много». Это, а также многое другое, следует из теоремы Хана–Банаха, которую нам предстоит доказать.

Пусть X — векторное пространство (как обычно, над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Определение 9.1. Функция $p\colon X \to \mathbb{R}$ называется *сублинейным функционалом*, если

(i) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) \quad (x, y \in X)$;
(ii) $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad (x \in X,\ \lambda \geqslant 0)$.

Например, всякая полунорма является сублинейным функционалом. Отличие этих двух понятий в том, что, во-первых, сублинейный функционал (в отличие от полунормы) может принимать и отрицательные значения, а во-вторых, в условии (ii) из определения сублинейного функционала речь идет только о неотрицательных (а не о произвольных) скалярах. Вот другой пример: если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то любой линейный функционал является сублинейным.

Мы обсудим теорему Хана–Банаха в двух вариантах. Первый вариант относится только к векторным пространствам над $\mathbb{R}$.

Теорема 9.1 (Хан, Банах)**.** *Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{R}$, $p\colon X \to \mathbb{R}$ — сублинейный функционал, $X_0 \subseteq X$ — векторное подпространство и $f_0\colon X_0 \to \mathbb{R}$ — линейный функционал, удовлетворяющий условию $f_0(x) \leqslant p(x)$ для всех $x \in X_0$. Тогда существует линейный функционал $f\colon X \to \mathbb{R}$, продолжающий f_0 и такой, что $f(x) \leqslant p(x)$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $X = X_0 \oplus \mathbb{R}y$ для некоторого $y \in X \setminus X_0$. Тогда задать линейный функционал f на X, продолжающий f_0 — это все равно, что задать число $c = f(y)$. Пусть f — такой функционал. Мы хотим добиться того, чтобы

$$f(\pm\lambda y + x) \leqslant p(\pm\lambda y + x) \quad \text{для всех } \lambda > 0 \text{ и } x \in X_0. \tag{9.1}$$

Вынося λ из обеих частей неравенства и сокращая на λ, видим, что условие (9.1) эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} & f(\pm y + \lambda^{-1}x) \leqslant p(\pm y + \lambda^{-1}x) \quad \text{для всех } \lambda > 0 \text{ и } x \in X_0 \\ & \qquad \iff f(\pm y + x) \leqslant p(\pm y + x) \quad \text{для всех } x \in X_0 \\ & \qquad \iff \pm c + f_0(x) \leqslant p(\pm y + x) \quad \text{для всех } x \in X_0 \\ & \qquad \iff f_0(x) - p(-y + x) \leqslant c \leqslant p(y + x) - f_0(x) \quad \text{для всех } x \in X_0. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Итак, наша задача свелась к нахождению числа $c \in \mathbb{R}$, удовлетворяющего (9.2). Ясно, что такое c существует тогда и только тогда, когда

$$f_0(x_1) - p(-y + x_1) \leqslant p(y + x_2) - f_0(x_2) \quad \text{для всех } x_1, x_2 \in X_0,$$

или, что эквивалентно,

$$f_0(x_1 + x_2) \leqslant p(y + x_2) + p(-y + x_1) \quad \text{для всех } x_1, x_2 \in X_0. \tag{9.3}$$

Но из условия следует, что для любых $x_1, x_2 \in X_0$ справедливы неравенства

$$f_0(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1 + x_2) \leqslant p(y + x_2) + p(-y + x_1).$$

Это доказывает (9.3), а вместе с ним и существование функционала f с требуемыми свойствами.

Общий случай сводится к предыдущему при помощи леммы Цорна. А именно, рассмотрим множество M, состоящее из пар (Z, g), где $Z \supseteq X_0$ — векторное подпространство в X, а $g\colon Z \to \mathbb{R}$ — линейный функционал, продолжающий f_0 и удовлетворяющий неравенству $g(x) \leqslant p(x)$ для всех $x \in Z$. Введем отношение порядка на M, полагая $(Z_1, g_1) \leqslant (Z_2, g_2)$, если $Z_1 \subseteq Z_2$ и $g_2|_{Z_1} = g_1$. Очевидно, любое линейно упорядоченное подмножество $\{(Z_\alpha, g_\alpha)\} \subset M$ имеет верхнюю грань (Z, g), где $Z = \bigcup_\alpha Z_\alpha$, а функционал g однозначно определяется из условия $g|_{Z_\alpha} = g_\alpha$ для всех α. Поэтому в M есть максимальный элемент (Z, f).

Мы утверждаем, что $Z = X$. В самом деле, если это не так, то зафиксируем $y \in X \setminus Z$ и, пользуясь уже разобранным частным случаем нашей теоремы, продолжим f до функционала h на пространстве $Z_1 = Z \oplus \mathbb{R}y$, удовлетворяющего условию $h(x) \leqslant p(x)$ для всех $x \in Z_1$. Но существование такого продолжения противоречит максимальности элемента (Z, f) в множестве M. Следовательно, $Z = X$, и f — искомый функционал. $\square$

В таком виде, как мы ее доказали, пользоваться теоремой Хана–Банаха не всегда удобно. Во-первых, пока не совсем понятно, какое отношение она имеет к ограниченным линейным функционалам на нормированных пространствах. А во-вторых, в ней ничего не говорится о векторных пространствах над $\mathbb{C}$. Чтобы сформулировать и доказать вторую разновидность теоремы Хана–Банаха, в большей степени применимую к задачам классического функционального анализа, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 9.2. *Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{C}$.*

(i) *Отображение*

$$\alpha\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(X,\mathbb{C}) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(X,\mathbb{R}), \quad \alpha(f) = \operatorname{Re} f,$$

является биекцией, и обратное к нему задается формулой

$$\alpha^{-1}(g)(x) = g(x) - ig(ix) \qquad (x \in X).$$

(ii) *Пусть $\|\cdot\|$ — полунорма на X, $g \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(X,\mathbb{R})$ и $\tilde g = \alpha^{-1}(g)$. Тогда*

$$|g(x)| \leqslant \|x\| \quad \forall\, x \in X \iff |\tilde g(x)| \leqslant \|x\| \quad \forall\, x \in X.$$

Доказательство. (i) Для любого $z \in \mathbb{C}$ справедливо равенство $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Re}(iz)$. Поэтому для любого $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(X,\mathbb{C})$ имеем

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Re} f(ix) \qquad (x \in X). \tag{9.4}$$

Зафиксируем теперь $g \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(X,\mathbb{R})$ и рассмотрим отображение

$$\tilde g\colon X \to \mathbb{C}, \quad \tilde g(x) = g(x) - ig(ix) \qquad (x \in X).$$

Очевидно, $\tilde g$ — $\mathbb{R}$-линейный функционал на X. Далее,

$$\tilde g(ix) = g(ix) + ig(x) = i\tilde g(x),$$

откуда следует, что $\tilde g$ $\mathbb{C}$-линеен. Ясно, наконец, что $\operatorname{Re}\tilde g = g$. Отсюда и из (9.4) следует утверждение (i).

(ii) Импликация ($\Longleftarrow$) очевидна. Для доказательства обратного утверждения зафиксируем произвольный $x \in X$ и представим $\tilde g(x)$ в виде $\tilde g(x) = re^{i\varphi}$, где $r \geqslant 0$. Положим $y = e^{-i\varphi}x$. Тогда $\tilde g(y) = r \in \mathbb{R}$, поэтому $\tilde g(y) = g(y)$. Отсюда

$$|\tilde g(x)| = r = \tilde g(y) = g(y) \leqslant \|y\| = \|x\|,$$

как и требовалось. □

Теорема 9.3 (Хан, Банах). *Пусть X — векторное пространство над полем $\mathbb{K}$ (где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), $\|\cdot\|$ — полунорма на X, $X_0 \subseteq X$ — векторное подпространство и $f_0\colon X_0 \to \mathbb{K}$ — линейный функционал, удовлетворяющий условию $|f_0(x)| \leqslant \|x\|$ для всех $x \in X_0$. Тогда существует линейный функционал $f\colon X \to \mathbb{K}$, продолжающий f_0 и такой, что $|f(x)| \leqslant \|x\|$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Случай 1: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Из теоремы 9.1 следует, что существует линейный функционал $f\colon X \to \mathbb{R}$, продолжающий f_0 и такой, что $f(x) \leqslant \|x\|$ для всех $x \in X$. Заменяя x на $-x$, получаем

$$-f(x) = f(-x) \leqslant \|-x\| = \|x\|,$$

откуда окончательно следует, что $-\|x\| \leqslant f(x) \leqslant \|x\|$, т.е. $|f(x)| \leqslant \|x\|$ для всех $x \in X$.

Случай 2: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Из уже разобранного случая 1 следует, что существует $\mathbb{R}$-линейный функционал $g\colon X \to \mathbb{R}$, продолжающий $\operatorname{Re} f_0$ и такой, что $|g(x)| \leqslant \|x\|$ для всех $x \in X$. Применяя лемму 9.2, видим, что функционал $f = \alpha^{-1}(g)$ — искомый. □

Выведем теперь несколько важных следствий из теоремы Хана–Банаха.

Следствие 9.4. *Пусть X — нормированное пространство, $X_0 \subseteq X$ — векторное подпространство. Тогда для любого $f_0 \in X_0^*$ существует $f \in X^*$, продолжающий f_0 и такой, что $\|f\| = \|f_0\|$.*

Доказательство. Домножим норму в X на число $\|f_0\|$ и применим теорему 9.3. □

Иначе говоря, любой ограниченный линейный функционал, заданный на подпространстве нормированного пространства, продолжается на все пространство с сохранением нормы. Естественно поинтересоваться: а можно ли таким же образом продолжать линейные операторы? В контексте линейной алгебры ответ утвердителен:

Упражнение 9.1. Пусть X и Y — векторные пространства (над любым полем) и $X_0 \subset X$ — векторное подпространство. Тогда любой линейный оператор $T_0 \colon X_0 \to Y$ продолжается до линейного оператора $T \colon X \to Y$.

Но в контексте функционального анализа это уже не так:

Упражнение 9.2. Если X и Y — нормированные пространства и $X_0 \subseteq X$ — векторное подпространство, то, вообще говоря, не всякий ограниченный линейный оператор $T_0 \colon X_0 \to Y$ продолжается до ограниченного линейного оператора $T \colon X \to Y$.

Замечание 9.1 (*для знакомых с основами гомологической алгебры*)**.** Упражнение 9.1 утверждает попросту, что все векторные пространства (т.е. все модули над полем) инъективны, а упражнение 9.2 состоит в том, что в категории нормированных пространств уже не все объекты инъективны. Тем не менее, из следствия 9.4 вытекает, что основное поле $\mathbb{K}$ — инъективное нормированное пространство. См. по этому поводу также задачи из листка 6.

Следствие 9.5. *Пусть X — нормированное пространство. Тогда для любого ненулевого $x \in X$ найдется такой $f \in X^*$, что $\|f\| = 1$ и $f(x) = \|x\|$.*

Доказательство. Зададим функционал $f_0 \colon \mathbb{K}x \to \mathbb{K}$ формулой $f_0(\lambda x) = \lambda\|x\|$ и продолжим его на X с сохранением нормы (см. следствие 9.4). □

Следствие 9.6. *Пусть X — нормированное пространство и $x_1, x_2 \in X$ — различные векторы. Тогда существует такой $f \in X^*$, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Следствие 9.6 обычно выражают фразой «ограниченные линейные функционалы *разделяют точки* пространства X», или «на любом нормированном пространстве имеется *достаточно много* ограниченных линейных функционалов».

Следствие 9.7. *Пусть X — нормированное пространство, $X_0 \subset X$ — векторное подпространство и $x \in X \setminus \overline{X_0}$. Тогда существует такой $f \in X^*$, что $\|f\| = 1$, $f|_{X_0} = 0$ и $f(x) = \rho(x, X_0)$.*

Доказательство. Применим следствие 9.5 к вектору $x + \overline{X_0} \in X/\overline{X_0}$ и получим такой функционал $g \in (X/\overline{X_0})^*$, что $\|g\| = 1$ и

$$g(x + \overline{X_0}) = \|x + \overline{X_0}\|^\wedge = \rho(x, \overline{X_0}) = \rho(x, X_0).$$

Остается положить $f = g \circ Q$, где $Q \colon X \to X/\overline{X_0}$ — факторотображение. Равенство $\|f\| = 1$ следует тогда из коизометричности Q, а остальные требуемые свойства f очевидны. □

Следствие 9.8. *Пусть X — нормированное пространство. Для любого $x \in X$ справедливо равенство*

$$\|x\| = \sup_{f \in X^*,\, \|f\| \leqslant 1} |f(x)|, \tag{9.5}$$

причем эта верхняя грань достигается на некотором f.

Доказательство. Это просто переформулировка следствия 9.5. □

Теперь мы можем выполнить обещание, данное в начале лекции 8.

Следствие 9.9. *Пусть $T \colon X \to Y$ — ограниченный линейный оператор между нормированными пространствами. Тогда $\|T^*\| = \|T\|$.*

Доказательство. Из определения оператора T^* и равенства (9.5) получаем:

$$\|T^*\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \|T^*(f)\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \sup_{\|x\| \leqslant 1} |T^*(f)(x)| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \sup_{\|f\| \leqslant 1} |f(Tx)| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\| = \|T\|. \quad \square$$

Следствие 9.10. *Если $S, T \in \mathscr{B}(X, Y)$ и $S \neq T$, то и $S^* \neq T^*$.*

9.2. Отделение выпуклых множеств

Обсудим теперь одно важное геометрическое следствие теоремы Хана–Банаха. Прежде чем его формулировать, дадим несколько определений.

Пусть X — векторное пространство (как обычно, над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Определение 9.2. Непустое подмножество $S \subseteq X$ называется

- *выпуклым*, если для любых $x, y \in S$ отрезок $[x, y] = \{tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\}$ содержится в S;
- *закругленным* (или *сбалансированным*), если $\lambda S \subset S$ для любого $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leqslant 1$;
- *абсолютно выпуклым*, если оно выпукло и закруглено;
- *поглощающим*, если для любого $x \in X$ найдется такое $C > 0$, что $x \in \lambda S$ для любого $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \geqslant C$.

Замечание 9.2. Обратите внимание, что если подмножество $S \subseteq X$ — закругленное или поглощающее, то $0 \in S$.

Пример 9.1. Если $\|\cdot\|$ — полунорма на X, то шары

$$\mathbb{B}_{r,X} = \{x \in X : \|x\| \leqslant r\}, \quad \mathbb{B}^\circ_{r,X} = \{x \in X : \|x\| < r\}$$

являются абсолютно выпуклыми поглощающими множествами (проверьте!).

В дальнейшем мы будем часто использовать следующие простейшие свойства выпуклых и закругленных множеств. Их доказательство — несложное упражнение.

Предложение 9.11. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *сумма любого семейства выпуклых множеств — выпуклое множество;*
(ii) *пересечение любого семейства выпуклых множеств — выпуклое множество;*
(iii) *образ и прообраз выпуклого множества при линейном отображении — выпуклые множества;*
(iv) *аналогичные утверждения справедливы для закругленных множеств;*
(v) *замыкание* $\overline{S}$ *и внутренность* $\mathrm{Int}(S)$ *выпуклого множества* S *в нормированном пространстве — выпуклые множества;*
(vi) *замыкание* $\overline{S}$ *закругленного множества* S *в нормированном пространстве — закругленное множество; если же* $0 \in \mathrm{Int}(S)$, *то и* $\mathrm{Int}(S)$ *закруглено.*

С каждым поглощающим множеством можно связать одну важную функцию — его функционал Минковского.

Определение 9.3. Пусть X — векторное пространство и $S \subseteq X$ — поглощающее множество. *Функционалом Минковского* множества S называется функция

$$p_S \colon X \to [0, +\infty); \quad p_S(x) = \inf\{\lambda \geqslant 0 : x \in \lambda S\}.$$

Перечислим простейшие свойства функционала Минковского:

Предложение 9.12. *Пусть* S *— поглощающее множество в векторном пространстве* X. *Тогда:*

(i) $p_S(\lambda x) = \lambda p_S(x)$ *для всех* $x \in X$, $\lambda \geqslant 0$;
(ii) *если* S *выпукло, то* $p_S(x+y) \leqslant p_S(x) + p_S(y)$ *для всех* $x, y \in X$;
(iii) *если* S *закруглено, то* $p_S(\lambda x) = |\lambda| p_S(x)$ *для всех* $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$;
(iv) *если* S *абсолютно выпукло, то* p_S *— полунорма;*
(v) *если* S *выпукло, то* $\{x : p_S(x) < 1\} \subseteq S \subseteq \{x : p_S(x) \leqslant 1\}$.

Доказательство. Мы докажем только утверждение (ii); остальные утверждения докажите сами в качестве упражнения.

Нетрудно проверить (проверьте!), что для любого выпуклого множества S и любых $\alpha, \beta \geqslant 0$ справедливо равенство

$$\alpha S + \beta S = (\alpha + \beta) S. \tag{9.6}$$

Возьмем теперь $x, y \in X$, зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $\alpha, \beta > 0$ так, чтобы

$$x \in \alpha S, \quad y \in \beta S, \quad \alpha \leqslant p_S(x) + \varepsilon, \quad \beta \leqslant p_S(y) + \varepsilon.$$

Из (9.6) заключаем, что $x + y \in (\alpha + \beta) S$, откуда

$$p_S(x+y) \leqslant \alpha + \beta \leqslant p_S(x) + p_S(y) + 2\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это завершает доказательство п. (ii). $\square$

Пусть теперь X — нормированное пространство над $\mathbb{R}$.

Определение 9.4. Говорят, что множества $A, B \subset X$ *разделены гиперплоскостью* (соответственно, *строго разделены гиперплоскостью*), если существуют такие $f \in X^*$ и $c \in \mathbb{R}$, что для любых $a \in A$ и $b \in B$ справедливо неравенство $f(a) \leqslant c \leqslant f(b)$ (соответственно, $f(a) < c < f(b)$).

С геометрической точки зрения это означает, что множества A и B лежат в разных замкнутых (соответственно, открытых) полупространствах, на которые гиперплоскость $\{x : f(x) = c\}$ разбивает пространство X.

Теорема 9.13. *Пусть X — нормированное пространство над $\mathbb{R}$, и пусть $A, B \subset X$ — выпуклые непересекающиеся подмножества.*

(i) *Если $\operatorname{Int} A \neq \varnothing$, то A и B разделены гиперплоскостью.*
(ii) *Если A и B открыты, то они строго разделены гиперплоскостью.*
(iii) *Если A замкнуто, а B компактно, то они строго разделены гиперплоскостью.*

Доказательство. (i) Поскольку $\operatorname{Int} A \neq \varnothing$, то и $\operatorname{Int}(B - A) \neq \varnothing$ (объясните, почему). Зафиксируем произвольный $y \in \operatorname{Int}(B - A)$ и положим $M = A - B + y$. Из предложения 9.11 следует, что M выпукло. Далее, $0 \in \operatorname{Int} M$ (почему?), поэтому M поглощающее. Наконец, $y \notin M$ (т.к. $A \cap B = \varnothing$), откуда $p_M(y) \geqslant 1$.

Рассмотрим линейный функционал $f_0 \colon \mathbb{R}y \to \mathbb{R}$, однозначно определенный условием $f_0(y) = p_M(y)$. Ясно, что $f_0(z) \leqslant p_M(z)$ для всех $z \in \mathbb{R}y$. Из теоремы 9.1 следует, что существует линейный функционал $f \colon X \to \mathbb{R}$, продолжающий f_0 и удовлетворяющий условию $f(x) \leqslant p_M(x)$ для всех $x \in X$. В частности, $f(x) \leqslant 1$ для всех $x \in M$. Отсюда с учетом того, что $0 \in \operatorname{Int} M$, следует, что f переводит некоторую окрестность нуля в ограниченное множество (обоснуйте!). Следовательно, f ограничен.

Наконец, заметим, что условие $f(x) \leqslant 1$ для всех $x \in M$ равносильно тому, что $f(a) - f(b) + p_M(y) \leqslant 1$ для всех $a \in A$, $b \in B$. Отсюда и из неравенства $p_M(y) \geqslant 1$ заключаем, что $f(a) \leqslant f(b)$. С учетом произвольности $a \in A$ и $b \in B$ это доказывает утверждение (i): в качестве константы $c \in \mathbb{R}$, фигурирующей в определении 9.4, можно взять, например, $\sup f(A)$.

(ii) Предположим теперь, что A и B открыты. Из п. (i) следует, что существуют такие $f \in X^*$ и $c \in \mathbb{R}$, что

$$\sup f(A) \leqslant c \leqslant \inf f(B). \tag{9.7}$$

Воспользуемся тем несложным утверждением (докажите его!), что любой ненулевой ограниченный линейный функционал — открытое отображение X на $\mathbb{R}$. Из него следует, что $f(A)$ и $f(B)$ — открытые подмножества $\mathbb{R}$, откуда с учетом (9.7) получаем строгие неравенства $f(a) < c < f(b)$ для всех $a \in A$, $b \in B$.

(iii) Наконец, предположим, что A замкнуто, а B компактно. Нетрудно проверить (проверьте!), что существует такое $\varepsilon > 0$, что $A \cap (B + \mathbb{B}^\circ_\varepsilon) = \varnothing$. Отсюда следует, что

$$(A + \mathbb{B}^\circ_{\varepsilon/2}) \cap (B + \mathbb{B}^\circ_{\varepsilon/2}) = \varnothing.$$

Поскольку множества $(A + \mathbb{B}^\circ_{\varepsilon/2})$ и $(B + \mathbb{B}^\circ_{\varepsilon/2})$ открыты и выпуклы, они строго разделены гиперплоскостью в силу п. (ii). Следовательно, A и B тем более строго разделены гиперплоскостью. $\square$

Замечание 9.3. Можно показать, что в конечномерном нормированном пространстве любые два выпуклых непересекающихся множества разделены гиперплоскостью. В бесконечномерном случае это уже, вообще говоря, не так, даже если эти множества замкнуты (см. задачи из листка 7).

Замечание 9.4. Мы получили теорему 9.13 о разделении выпуклых множеств как следствие теоремы Хана–Банаха. На самом деле, если немного переформулировать п. (i) теоремы 9.13 (а именно, вместо нормированных пространств рассматривать произвольные векторные пространства, а вместо внутренности — так называемую «линейную внутренность»), то полученное утверждение окажется в сущности эквивалентным теореме Хана–Банаха (см. соответствующую задачу из листка 7).

О ряде других эквивалентных формулировок теоремы Хана–Банаха и об их приложениях можно прочитать в книге R. Holmes, “Geometric Functional Analysis and its applications” (Springer, 1975).