А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 5

5.1. Гильбертовы пространства (продолжение)

5.1.1. Унитарные изоморфизмы

Обсудим теперь, какие предгильбертовы пространства следует считать «одинаковыми».

Определение 5.1. Пусть H_1 и H_2 — предгильбертовы пространства. Линейное отображение $U\colon H_1 \to H_2$ называется *унитарным изоморфизмом*, если оно биективно и $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$ для всех $x, y \in H_1$.

Предгильбертовы пространства называются *унитарно изоморфными*, если между ними существует унитарный изоморфизм.

Пример 5.1. Положим $H_1 = L^2(\mathbb{T})$ и $H_2 = L^2[-\pi, \pi]$; тогда, как нетрудно убедиться (убедитесь!), оператор $U\colon H_1 \to H_2$, $(Uf)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(e^{it})$ — унитарный изоморфизм.

Следующее предложение показывает, что понятие унитарного изоморфизма на самом деле для нас не ново.

Предложение 5.1. *Пусть H_1 и H_2 — предгильбертовы пространства. Линейное отображение $U\colon H_1 \to H_2$ удовлетворяет условию $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$ для всех $x, y \in H_1$ тогда и только тогда, когда оно изометрично.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться тождеством поляризации. □

Следствие 5.2. *Линейное отображение между предгильбертовыми пространствами является унитарным изоморфизмом тогда и только тогда, когда оно является изометрическим изоморфизмом.*

Наша цель — полностью описать строение гильбертовых пространств и классифицировать их с точностью до унитарного изоморфизма. Для этого нам сначала понадобится ввести ряд геометрических понятий.

5.1.2. Проекции и ортогональные дополнения

Пусть H — предгильбертово пространство.

Определение 5.2. Говорят, что элементы $x, y \in H$ *ортогональны* (и пишут $x \perp y$), если $\langle x, y \rangle = 0$.

Предложение 5.3 (теорема Пифагора). *Если $x \perp y$, то $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Доказательство. Прямая проверка. □

Определение 5.3. Говорят, что элемент $x \in H$ *ортогонален* подмножеству $M \subset H$ (и пишут $x \perp M$), если $x \perp y$ для всех $y \in M$.

Определение 5.4. Для каждого подмножества $M \subset H$ его *ортогональным дополнением* называется множество

$$M^\perp = \{x \in H : x \perp M\}.$$

Причина, по которой ортогональное дополнение называется «дополнением», выяснится впоследствии. А пока установим простейшие свойства ортогональных дополнений.

Предложение 5.4. *Пусть M — подмножество в H.*

(i) *$M^\perp$ — замкнутое векторное подпространство в Y;*
(ii) *$M^\perp = (\overline{\mathrm{span}}(M))^\perp$;*
(iii) *$\{0\}^\perp = H$, $H^\perp = \{0\}$;*
(iv) *$M_1 \subset M_2 \Longrightarrow M_2^\perp \subset M_1^\perp$;*
(v) *$\overline{\mathrm{span}}(M) \subset M^{\perp\perp}$.*

Доказательство. Утверждения (i) и (ii) следуют из определения скалярного произведения и из его непрерывности, утверждения (iii) и (iv) очевидны, включение $M \subset M^{\perp\perp}$ также очевидно, а из него с учетом (i) следует (v). □

Определение 5.5. Пусть $H_0 \subset H$ — векторное подпространство и $x \in H$. Вектор $y \in H_0$ называется *проекцией* x на H_0, если $x - y \perp H_0$.

Геометрическая интуиция может подсказать и другое разумное определение проекции вектора на подпространство: проекция x на H_0 — это элемент из H_0, *ближайший* к x, т.е. такой элемент $y \in H_0$, что $\|x - y\| \leqslant \|x - z\|$ для всех $z \in H_0$ (или, что то же самое, $\|x - y\| = \rho(x, H_0)$). Как и следовало ожидать, эти два определения проекции эквивалентны:

Предложение 5.5. *Пусть H — предгильбертово пространство, $H_0 \subset H$ — векторное подпространство и $x \in H$.*

(i) *Вектор $y \in H_0$ является проекцией x на H_0 тогда и только тогда, когда y — ближайший к x элемент H_0.*
(ii) *Если такой вектор y существует, то он единственный.*

Доказательство. Предположим, что y — проекция x на H_0. Из теоремы Пифагора следует, что для каждого $z \in H_0$

$$\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geqslant \|x - y\|^2,$$

причем при $z \neq y$ имеем строгое неравенство. Следовательно, y — ближайший к x элемент H_0, и другого такого элемента нет.

Предположим теперь, что y — ближайший к x элемент подпространства H_0. Возьмем $z \in H_0$ и рассмотрим функцию $\varphi(t) = \|x - y + tz\|^2$ ($t \in \mathbb{R}$). Заметим, что $\varphi(t) = \|x - y\|^2 + 2t \operatorname{Re}\langle x - y, z\rangle + t^2\|z\|^2$. По условию, φ имеет минимум при $t = 0$, откуда $\operatorname{Re}\langle x - y, z\rangle = 0$. Если теперь рассмотреть функцию $\psi(t) = \|x - y + itz\|^2$, то аналогичное рассуждение показывает, что и $\operatorname{Im}\langle x - y, z\rangle = 0$. Следовательно, $\langle x - y, z\rangle = 0$ для любого $z \in H_0$, т.е. y — проекция x на H_0. □

Обратите внимание: пока что мы ничего не утверждаем о существовании проекций. Вначале — простое необходимое условие:

Наблюдение 5.6. Если каждый вектор $x \in H$ обладает проекцией на подпространство $H_0 \subset H$, то H_0 замкнуто. В самом деле, для любого $x \in \overline{H_0}$ имеем $\rho(x, H_0) = 0$, поэтому ближайший к x элемент подпространства H_0 — если только он существует — должен совпадать с самим x.

В случае полного H верно и обратное:

Теорема 5.7 (о проекции)**.** *Пусть H — гильбертово пространство и $H_0 \subset H$ — замкнутое векторное подпространство. Тогда каждый вектор $x \in H$ обладает единственной проекцией на H_0.*

Доказательство. Положим $d = \rho(x, H_0)$. Ввиду предложения 5.5, нам достаточно найти элемент $y \in H_0$, для которого $\|x - y\| = d$. Выберем последовательность (y_n) в H_0 так, чтобы $\|x - y_n\| \to d$ при $n \to \infty$, и покажем, что она сходится к нужному нам y.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\|x - y_n\|^2 \leqslant d^2 + \varepsilon$ при $n > N$. Зафиксируем произвольные $m, n > N$ и применим к векторам $x - y_n$ и $x - y_m$ тождество параллелограмма (см. предложение 4.12):

$$\begin{aligned}\|y_m - y_n\|^2 &= 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - \|2x - (y_n + y_m)\|^2 = \\ &= 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 \leqslant \\ &\leqslant 2(d^2 + \varepsilon) + 2(d^2 + \varepsilon) - 4d^2 = 4\varepsilon,\end{aligned}$$

поскольку $\|x - (y_n + y_m)/2\| \geqslant d$. Отсюда следует, что последовательность (y_n) фундаментальна, и поэтому сходится (ввиду полноты H и замкнутости H_0) к некоторому $y \in H_0$. Вспоминая, что $\|x - y_n\| \to d$ при $n \to \infty$, получаем $\|x - y\| = d$, как и требовалось. $\square$

Замечание 5.1. На самом деле мы доказали даже более сильное утверждение, чем требовалось: *если H — гильбертово пространство и $M \subset H$ — замкнутое выпуклое подмножество, то для каждого $x \in H$ в множестве M существует единственный элемент, ближайший к x.* Попробуйте понять это, проанализировав доказательство теоремы 5.7.

Теорему о проекции удобно переформулировать в терминах ортогональных дополнений. Сначала сделаем следующее несложное наблюдение.

Наблюдение 5.8. Если H_1 и H_2 — предгильбертовы пространства, то норма на их ℓ^2-сумме $H_1 \oplus_2 H_2$ (см. определение 3.1) порождается скалярным произведением

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle.$$

Следовательно, $H_1 \oplus_2 H_2$ — предгильбертово пространство. Если же H_1 и H_2 — гильбертовы пространства, то таково же и $H_1 \oplus_2 H_2$ (см. 3.15).

Через некоторое время мы обобщим это наблюдение на случай произвольного семейства предгильбертовых пространств.

Следующая теорема, в сущности, эквивалентна теореме о проекции. Она, в частности, объясняет, почему ортогональное дополнение так называется.

Теорема 5.9 (об ортогональном дополнении)**.** *Пусть H — гильбертово пространство и $H_0 \subset H$ — замкнутое векторное подпространство. Тогда $H = H_0 \oplus H_0^\perp$. Более того, отображение*

$$H_0 \oplus_2 H_0^\perp \to H, \quad (x, y) \mapsto x + y,$$

— унитарный изоморфизм.

Доказательство. Изометричность указанного отображения следует из теоремы Пифагора, а сюръективность — из теоремы о проекции 5.7. □

Следствие 5.10. *Для любого подмножества M гильбертова пространства H справедливо равенство $\overline{\mathrm{span}}(M) = M^{\perp\perp}$.*

Доказательство. Положим $H_0 = \overline{\mathrm{span}}(M)$. Поскольку $M^\perp = H_0^\perp$ (см. предложение 5.4), нам достаточно доказать равенство $H_0 = H_0^{\perp\perp}$. Применяя теорему 5.9 сначала к H_0, а потом к $H_0^\perp$, получаем разложения

$$H = H_0 \oplus H_0^\perp = H_0^\perp \oplus H_0^{\perp\perp}.$$

Отсюда с учетом включения $H_0 \subset H_0^{\perp\perp}$ (см. предложение 5.4) следует требуемое равенство $H_0 = H_0^{\perp\perp}$. □

5.2. Направленности и суммируемые семейства

Прежде чем продолжить изучение гильбертовых пространств, нам понадобится ненадолго отвлечься и поговорить о более общих вещах. Мы уже знаем (см. определение 3.2), что такое сумма произвольного (не обязательно счетного) семейства неотрицательных чисел. Наша ближайшая цель — обобщить это понятие на случай семейств элементов произвольного нормированного пространства.

Определение 5.6. Частично упорядоченное множество $(\Lambda, \leqslant)$ называется *направленным*, если для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$ существует такое $\nu \in \Lambda$, что $\lambda \leqslant \nu$ и $\mu \leqslant \nu$.

Вот два типичных примера, которые полезно держать в голове.

Пример 5.2. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ и — более общим образом — любое линейно упорядоченное множество являются направленными.

Пример 5.3. Пусть Λ — множество всех окрестностей какой-либо точки в топологическом пространстве, упорядоченное по обратному включению (т.е. $U \leqslant V \iff U \supset V$). Легко видеть, что Λ — направленное множество.

Определение 5.7. *Направленностью* в множестве X называется любое отображение $x \colon \Lambda \to X$, где Λ — какое-либо направленное множество.

Ясно, что понятие направленности обобщает понятие последовательности. Если x — направленность в X, то для $\lambda \in \Lambda$ вместо $x(\lambda)$ обычно пишут x_λ (как это и принято в случае последовательностей), а всю направленность x представляют себе как семейство (x_λ), проиндексированное элементами множества Λ.

Пусть теперь X — топологическое пространство. Сходимость направленностей в X определяется дословно так же, как для последовательностей:

Определение 5.8. Говорят, что направленность (x_λ) *сходится* к точке $x \in X$ (и пишут $x_\lambda \to x$ или $x = \lim_\Lambda x_\lambda$), если для любой окрестности $U \ni x$ найдется такое $\lambda_0 \in \Lambda$, что $x_\lambda \in U$ для всех $\lambda \geqslant \lambda_0$.

Свойства пределов направленностей во многом аналогичны свойствам пределов последовательностей:

Предложение 5.11. *Пусть X — топологическое пространство.*

(i) *Если X хаусдорфово, то каждая сходящаяся направленность в X имеет только один предел.*
(ii) *Если $f\colon X \to Y$ — отображение, непрерывное в точке $x \in X$, то для каждой направленности (x_λ) в X, сходящейся к x, направленность $f(x_\lambda)$ сходится к $f(x)$.*
(iii) *Если Y — подмножество в X и (y_λ) — направленность в Y, сходящаяся к точке $x \in X$, то $x \in \overline{Y}$.*

Доказывается это предложение дословно так же, как и для последовательностей (убедитесь!).

Может возникнуть вопрос: а зачем нужны направленности, если есть последовательности? Основное преимущество направленностей по сравнению с последовательностями состоит в том, что каждое из утверждений предложения 5.11 допускает обращение (см. задачи листка 4). В частности, множество $Y \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит пределы всех своих направленностей, сходящихся в X. Следовательно, топология на множестве полностью определяется запасом сходящихся направленностей. Для последовательностей это уже не так. Бывают, например, недискретные топологические пространства, в которых всякая сходящаяся последовательность стабилизируется (т.е. становится постоянной начиная с некоторого номера) — попробуйте привести пример! Понятно, что в таких пространствах описать топологию с помощью сходящихся последовательностей нельзя. Впрочем, если пространство X метризуемо или, более общим образом, удовлетворяет первой аксиоме счетности (это означает, что каждая его точка обладает счетной базой окрестностей), то, как вам известно из курса анализа, все утверждения предложения 5.11 допускают обращение и в случае последовательностей.

Нам с вами направленности понадобятся для того, чтобы дать следующее важное определение суммируемого семейства. Для произвольного множества I обозначим через $\mathrm{Fin}(I)$ семейство всех его конечных подмножеств и упорядочим $\mathrm{Fin}(I)$ по включению. Очевидно, $\mathrm{Fin}(I)$ — направленное множество.

Пусть теперь X — нормированное пространство.

Определение 5.9. Пусть $(x_i)_{i\in I}$ — семейство элементов в X. Для каждого $A \in \mathrm{Fin}(I)$ положим $x_A = \sum_{i\in A} x_i$. Семейство $(x_i)_{i\in I}$ называется *суммируемым*, если направленность $(x_A)_{A\in\mathrm{Fin}(I)}$ сходится. Предел этой направленности называется *суммой* семейства $(x_i)_{i\in I}$ и обозначается через $\sum_{i\in I} x_i$.

На самом деле можно дать и другое определение суммируемого семейства, не использующее направленностей:

Упражнение 5.1. Докажите, что семейство $(x_i)_{i\in I}$ в нормированном пространстве X суммируемо к $x \in X$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(i) множество $S = \{i \in I : x_i \neq 0\}$ не более чем счетно;

(ii) если S конечно, то $\sum_{i\in S} x_i = x$, а если S счетно, то для любой биекции $\pi \colon \mathbb{N} \to S$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ сходится к x.

Таким образом, понятие суммируемого семейства фактически сводится к известному вам понятию безусловно сходящегося ряда (т.е. ряда, сходящегося при любой перестановке его членов). Тем не менее, по техническим причинам часто бывает удобнее работать с суммируемыми семействами в смысле определения 5.9, чем с безусловно сходящимися рядами.

Для семейств неотрицательных чисел понятие суммируемости эквивалентно обсуждавшемуся в лекции 3:

Упражнение 5.2. Семейство неотрицательных чисел суммируемо тогда и только тогда, когда оно суммируемо в смысле определения 3.2.

Вот типичный пример суммируемого семейства:

Пример 5.4. Пусть $1 < p < \infty$ и $X = \ell^p(I)$ (см. определение 3.3). Для каждого $i \in I$ обозначим через e_i функцию на I, которая принимает значение 1 в точке i, а в остальных точках равна нулю. Ясно, что $e_i \in \ell^p(I)$. Мы утверждаем, что для любого $x \in \ell^p(I)$ справедливо равенство

$$x = \sum_{i\in I} x_i e_i. \tag{5.1}$$

В самом деле, числовое семейство $(|x_i|^p)$ суммируемо по определению пространства $\ell^p(I)$, поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $A \in \mathrm{Fin}(I)$, что

$$\sum_{i\in I\setminus A} |x_i|^p < \varepsilon.$$

Следовательно, для любого $B \in \mathrm{Fin}(I)$, содержащего A, мы имеем

$$\Bigl\|x - \sum_{i\in B} x_i e_i\Bigr\|^p = \sum_{i\in I\setminus B} |x_i|^p < \varepsilon,$$

а это и означает справедливость формулы (5.1).

Предостережение 5.2. Из курса анализа вы знаете, что ряд действительных чисел сходится безусловно (т.е. при любой перестановке его членов) тогда и только тогда, когда он сходится абсолютно. Аналогичное утверждение справедливо и в любом конечномерном нормированном пространстве (попробуйте его доказать). Однако следует иметь в виду, что в бесконечномерных банаховых пространствах это уже не так. С одной стороны, всякий абсолютно сходящийся ряд сходится безусловно (см. лемму 3.17), и всякое абсолютно суммируемое семейство суммируемо (убедитесь). С другой стороны, нетрудно привести пример (попробуйте это сделать) безусловно сходящегося ряда в бесконечномерном банаховом пространстве, который не сходится абсолютно. На самом деле, согласно глубокой теореме Дворецкого–Роджерса (которую мы доказывать не будем), в любом бесконечномерном нормированном пространстве существует безусловно сходящийся ряд, не сходящийся абсолютно.