А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 3

3.1. Основные конструкции нормированных пространств

3.1.1. ℓ^p-суммы и c_0-суммы

Пусть X и Y — нормированные пространства. Зафиксируем $p \in [1,+\infty)$ и для каждого вектора $(x,y) \in X \oplus Y$ положим

$$\|(x,y)\|_p = \big(\|x\|^p + \|y\|^p\big)^{1/p}.$$

Из неравенства Минковского следует, что $\|\cdot\|_p$ — норма на $X \oplus Y$. Введем также норму $\|\cdot\|_\infty$ на $X \oplus Y$, полагая

$$\|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Определение 3.1. Пространство $X \oplus Y$, снабженное нормой $\|\cdot\|_p$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$), называется *$\ell^p$-суммой* пространств X и Y и обозначается через $X \oplus_p Y$.

Замечание 3.1. Легко проверить, что нормы $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_q$ на $X \oplus Y$ эквивалентны для всех p,q и задают на $X \oplus Y$ обычную топологию прямого произведения. Это можно вывести либо из задачи 1.5 (листок 1), либо из предложения 1.5. Поэтому в тех случаях, когда нас будут интересовать топологические (а не метрические) свойства нормированного пространства $X \oplus_p Y$, мы будем обозначать его просто $X \oplus Y$ и называть *прямой суммой* пространств X и Y.

Точно так же определяется ℓ^p-сумма любого конечного числа нормированных пространств. Чтобы определить ℓ^p-сумму бесконечного семейства пространств, введем следующее понятие.

Пусть I — произвольное множество и $\mathrm{Fin}(I)$ — семейство всех его конечных подмножеств.

Определение 3.2. *Суммой* семейства $(a_i)_{i\in I}$ неотрицательных чисел называется величина

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup_{J\in\mathrm{Fin}(I)} \sum_{i\in J} a_i \in [0,+\infty].$$

Упражнение 3.1. Покажите, что $\sum_{i\in I} a_i < +\infty$ тогда и только тогда, когда множество $S = \{i \in I : a_i > 0\}$ не более чем счетно, причем если оно счетно, то ряд $\sum_{i\in S} a_i$ сходится при какой-либо (или, что эквивалентно, при любой) нумерации множества S.

Определение 3.3. Пусть $(X_i)_{i\in I}$ — семейство нормированных пространств.

(i) Пусть $1 \leqslant p < \infty$. Положим

$$\Big(\bigoplus_{i\in I} X_i\Big)_p = \Big\{x = (x_i) \in \prod_{i\in I} X_i : \sum_{i\in I} \|x_i\|^p < \infty\Big\}.$$

Из неравенства Минковского следует, что $(\bigoplus X_i)_p$ — векторное подпространство в $\prod X_i$, и что формула

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i \in I} \|x_i\|^p \right)^{1/p}$$

задает норму на $(\bigoplus X_i)_p$. Полученное нормированное пространство $(\bigoplus X_i)_p$ называется ℓ^p-*суммой* семейства (X_i).

(ii) Положим

$$\Bigl(\bigoplus_{i \in I} X_i \Bigr)_\infty = \Bigl\{ x = (x_i) \in \prod_{i \in I} X_i : \sup_{i \in I} \|x_i\| < \infty \Bigr\}.$$

Очевидно, что $(\bigoplus X_i)_\infty$ — векторное подпространство в $\prod X_i$, и что оно является нормированным пространством относительно нормы

$$\|x\|_\infty = \sup_{i \in I} \|x_i\|.$$

Полученное нормированное пространство $(\bigoplus X_i)_\infty$ называется ℓ^∞-*суммой* семейства (X_i).

(iii) Положим

$$\Bigl(\bigoplus_{i \in I} X_i \Bigr)_0 = \Bigl\{ x = (x_i) \in \prod_{i \in I} X_i : \text{функция } i \mapsto \|x_i\| \text{ исчезает на бесконечности} \Bigr\}.$$

Очевидно, $(\bigoplus X_i)_0$ — векторное подпространство в $(\bigoplus X_i)_\infty$, поэтому оно является нормированным пространством относительно нормы $\|\cdot\|_\infty$. Это пространство называется c_0-*суммой* семейства (X_i).

Если $X_i = \mathbb{K}$ для всех $i \in I$, то пространство $(\bigoplus X_i)_p$ обозначается через $\ell^p(I)$, а пространство $(\bigoplus X_i)_0$ — через $c_0(I)$. Отметим, что $\ell^p(\mathbb{N}) = \ell^p$ и $c_0(\mathbb{N}) = c_0$.

3.1.2. Факторпространства

Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subset X$ — векторное подпространство. Наша ближайшая цель будет состоять в том, чтобы ввести норму на факторпространстве X/X_0.

Обозначим через $Q\colon X \to X/X_0$ факторотображение, т.е. отображение, действующее по правилу $x \mapsto x + X_0$. Естественно попытаться ввести норму на X/X_0 таким образом, чтобы Q было ограничено. Заметим, что если такая норма существует, то X_0 должно быть замкнутым; в самом деле, $X_0 = \operatorname{Ker} Q = Q^{-1}(\{0\})$, а прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении замкнут.

Оказывается, верно и обратное: если X_0 замкнуто в X, то на X/X_0 есть норма с нужным нам свойством. На самом деле таких норм много, но среди них есть одна, которая «лучше всех»; ее-то мы и построим.

Для каждого $u \in X/X_0$ положим

$$\|u\|^\wedge = \inf\{\|z\| : z \in Q^{-1}(u)\}. \tag{3.1}$$

Эквивалентно,

$$\|x + X_0\|^\wedge = \inf\{\|x + y\| : y \in X_0\}. \tag{3.2}$$

Заменяя в формуле (3.2) y на $-y$, видим, что величина $\|x + X_0\|$ равна расстоянию $\rho(x, X_0)$ от x до X_0.

Предложение 3.1. *Функция $\|\cdot\|^\wedge$ — полунорма на X/X_0.*

Докажите это предложение сами в качестве упражнения.

Предложение 3.2. *Функция $\|\cdot\|^\wedge$ — норма $\iff$ X_0 замкнуто в X.*

Доказательство. Функция $\|\cdot\|^\wedge$ является нормой на X/X_0 тогда и только тогда, когда $\|x + X_0\| > 0$ для всех $x \in X \setminus X_0$. Поскольку $\|x + X_0\| = \rho(x, X_0)$ (см. выше), положительность этого числа для всех $x \in X \setminus X_0$ равносильна замкнутости X_0. $\square$

Определение 3.4. В случае замкнутого подпространства $X_0 \subset X$ построенная выше норма $\|\cdot\|^\wedge$ называется *факторнормой* нормы $\|\cdot\|$ на X. Факторпространство X/X_0 по умолчанию снабжается этой нормой.

Предложение 3.3. *Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subset X$ — замкнутое векторное подпространство. Тогда факторотображение $Q\colon X \to X/X_0$ коизометрично.*

Доказательство. Из (3.2) следует, что $\|x + X_0\|^\wedge \leqslant \|x\|$ для всех $x \in X$; стало быть, $Q(\mathbb{B}^\circ_{1,X}) \subset \mathbb{B}^\circ_{1,X/X_0}$. Обратно, пусть $u \in \mathbb{B}^\circ_{1,X/X_0}$, т.е. $\|u\|^\wedge < 1$. Тогда из (3.1) получаем, что $u = Q(z)$ для некоторого $z \in X$, $\|z\| < 1$. Следовательно, $Q(\mathbb{B}^\circ_{1,X}) = \mathbb{B}^\circ_{1,X/X_0}$, т.е. Q коизометрично. $\square$

Замечание 3.2. Поскольку факторотображение Q коизометрично, оно открыто. Отсюда нетрудно вывести (сделайте это), что топология на X/X_0 — это в точности фактортопология топологии на X; иными словами, подмножество $U \subset X/X_0$ открыто тогда и только тогда, когда множество $Q^{-1}(U)$ открыто в X.

Теперь мы можем ответить на вопрос, почему факторнорма — это наиболее «правильная» норма на X/X_0. Дело в том, что факторпространство X/X_0, снабженное этой нормой, обладает следующим универсальным свойством, полностью его характеризующим.

Теорема 3.4. *Пусть X — нормированное пространство, $X_0 \subset X$ — замкнутое подпространство, $Q\colon X \to X/X_0$ — факторотображение. Тогда для каждого нормированного пространства Y и каждого оператора $T \in \mathscr{B}(X, Y)$, удовлетворяющего условию $T(X_0) = 0$, существует единственный оператор $\widehat{T} \in \mathscr{B}(X/X_0, Y)$, делающий следующую диаграмму коммутативной:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "Q"'] & Y \\ X/X_0 \arrow[ur, dashed, "\widehat{T}"'] & \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

При этом $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.

Доказательство. Существование и единственность линейного оператора $\widehat{T}$, делающего диаграмму (3.3) коммутативной, известны из курса алгебры. Докажем его ограниченность. Из коммутативности диаграммы и условия $T(X_0) = 0$ получаем, что для любых $x \in X$ и $y \in X_0$ справедливы равенства

$$\widehat{T}(x + X_0) = T(x) = T(x + y),$$

и, следовательно,

$$\|\widehat{T}(x + X_0)\| = \|T(x + y)\| \leqslant \|T\| \|x + y\|.$$

Беря inf по всем $y \in X_0$, получаем неравенство

$$\|\widehat{T}(x + X_0)\| \leqslant \|T\| \|x + X_0\|^\wedge.$$

Следовательно, оператор $\widehat{T}$ ограничен, причем $\|\widehat{T}\| \leqslant \|T\|$. Для доказательства противоположного неравенства заметим, что если $X/X_0 \neq 0$ (т.е. $X \neq X_0$), то $\|Q\| = 1$, т.к. Q — коизометрия. Следовательно,

$$\|T\| = \|\widehat{T}Q\| \leqslant \|\widehat{T}\| \|Q\| = \|\widehat{T}\|.$$

Вместе с уже доказанной оценкой $\|\widehat{T}\| \leqslant \|T\|$ это дает нужное равенство $\|\widehat{T}\| = \|T\|$. При $X/X_0 = 0$ это равенство также справедливо по очевидным причинам. □

Доказанную теорему можно по-другому сформулировать так:

Теорема 3.5. *Для любого нормированного пространства Y отображение*

$$\mathscr{B}(X/X_0, Y) \to \big\{T \in \mathscr{B}(X, Y) \,:\, T(X_0) = 0\big\} \subset \mathscr{B}(X, Y), \quad S \mapsto S \circ Q,$$

является изометрическим изоморфизмом.

Замечание 3.3. На категорном языке теорема 3.4, как и эквивалентная ей теорема 3.5, означают, что пара $(X/X_0, Q)$ есть *коядро* вложения $X_0 \hookrightarrow X$ (как в категории $\mathscr{N}orm$, так и в категории $\mathscr{N}orm_1$). Это и есть наиболее «правильное» объяснение того, почему норма на факторпространстве вводится именно так, а не иначе.

Упражнение 3.2. Докажите, что в категориях $\mathscr{N}orm$ и $\mathscr{N}orm_1$ (см. замечание 2.2) каждый морфизм имеет ядро и коядро.

Следствие 3.6. *Пусть X и Y — нормированные пространства, $X_0 \subset X$ и $Y_0 \subset Y$ — замкнутые подпространства, $Q_X \colon X \to X/X_0$ и $Q_Y \colon Y \to Y/Y_0$ — соответствующие фактоотображения. Тогда для каждого оператора $T \in \mathscr{B}(X, Y)$, удовлетворяющего условию $T(X_0) \subset Y_0$, существует единственный оператор $\bar{T} \in \mathscr{B}(X/X_0, Y/Y_0)$, делающий следующую диаграмму коммутативной:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "Q_X"'] & Y \arrow[d, "Q_Y"] \\ X/X_0 \arrow[r, dashed, "\bar{T}"'] & Y/Y_0 \end{tikzcd}$$

При этом $\|\bar{T}\| \leqslant \|T\|$.

Доказательство. Достаточно применить теорему 3.4 к оператору $Q_Y T$. □

Сформулируем полезное добавление к теореме 3.4.

Предложение 3.7. *В обозначениях теоремы* 3.4 *справедливы следующие утверждения:*

(i) $\widehat{T}$ *открыт* $\iff$ T *открыт;*
(ii) $\widehat{T}$ *коизометричен* $\iff$ T *коизометричен.*

Доказательство. Поскольку оператор Q коизометричен, из коммутативности диаграммы (3.3) следует равенство $\widehat{T}(\mathbb{B}^{\circ}_{1,X/X_0}) = T(\mathbb{B}^{\circ}_{1,X})$. Из него понятным образом вытекает как (i), так и (ii). □

Следствие 3.8. *Пусть X и Y — нормированные пространства и $T \in \mathscr{B}(X,Y)$. Обозначим через $\widehat{T} \in \mathscr{B}(X/\operatorname{Ker} T, Y)$ оператор, делающий диаграмму*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "Q"'] & Y \\ X/\operatorname{Ker} T \arrow[ur, dashed, "\widehat{T}"'] & \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

коммутативной (он существует в силу теоремы 3.4*). Тогда*

(i) $\widehat{T}$ — *топологический изоморфизм* $\iff$ T *открыт;*
(ii) $\widehat{T}$ — *изометрический изоморфизм* $\iff$ T *коизометричен.*

Доказательство. Заметим, что $\operatorname{Ker}\widehat{T} = 0$. Поэтому оба утверждения следуют из предложения 3.7 с учетом того, что инъективный оператор $\widehat{T}$ является топологическим (соответственно, изометрическим) изоморфизмом тогда и только тогда, когда он открыт (соответственно, коизометричен). □

Замечание 3.4. Обратите внимание на отличие следствия 3.8 от его алгебраических аналогов, коротко формулируемых фразой «фактор по ядру изоморфен образу». Отличие состоит в том, что в категориях $\mathscr{N}orm$ и $\mathscr{N}orm_1$ морфизм $X/\operatorname{Ker} T \to Y$, индуцированный эпиморфизмом $T\colon X \to Y$, вовсе не обязан быть изоморфизмом[1].

3.2. Банаховы пространства

Напомним, что последовательность (x_n) в метрическом пространстве (X,ρ) называется *фундаментальной* (или *последовательностью Коши*), если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при $n, m > N$. Каждая сходящаяся последовательность фундаментальна, но обратное в общем случае неверно. Метрические пространства, в которых всякая фундаментальная последовательность сходится, называются *полными*.

[1]По этой причине аддитивная категория $\mathscr{N}orm$ не является абелевой в отличие от, скажем, категорий векторных пространств, абелевых групп, или — более общим образом — модулей над произвольным кольцом.

Определение 3.5. Нормированное пространство называется *банаховым*, если оно полно относительно метрики $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Пример 3.1. В курсе классического анализа доказывается, что $\mathbb{R}$ полно (критерий Коши), а также что $\mathbb{R}_2^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ полно. Отождествляя стандартным образом $\mathbb{C}^n$ с $\mathbb{R}^{2n}$, видим, что и $\mathbb{C}_2^n = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ полно.

Как и раньше, обозначим через $\mathbb{K}$ любое из полей $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, и будем рассматривать нормированные пространства над $\mathbb{K}$. Будет ли $\mathbb{K}^n$ банаховым пространством, если снабдить его какой-нибудь нормой, отличной от евклидовой нормы $\|\cdot\|_2$? Чтобы ответить на этот вопрос, сделаем следующее несложное наблюдение.

Предложение 3.9. *Пусть X и Y — нормированные пространства.*

(i) *Если (x_n) — фундаментальная последовательность в X, то (Tx_n) — фундаментальная последовательность в Y для любого $T \in \mathscr{B}(X, Y)$.*
(ii) *Если X и Y топологически изоморфны и X полно, то и Y полно.*

Доказательство. Утверждение (i) следует из оценки $\|Tx_n - Tx_m\| \leqslant \|T\|\|x_n - x_m\|$. Чтобы доказать утверждение (ii), достаточно заметить, что топологический изоморфизм устанавливает биекцию между классами сходящихся последовательностей в X и Y. В силу (i), он же устанавливает биекцию между классами фундаментальных последовательностей в X и Y. Дальше ясно. □

Отметим, что при произвольных гомеоморфизмах метрических пространств полнота сохраняться вовсе не обязана (приведите пример!).

Следствие 3.10. *Если $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ — эквивалентные нормы на векторном пространстве X и $(X, \|\cdot\|')$ полно, то и $(X, \|\cdot\|'')$ полно.*

Следствие 3.11. *Конечномерное векторное пространство полно относительно любой нормы.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться предложением 1.5 и примером 3.1. □

Напомним следующий несложный факт (если вы с ним незнакомы, обязательно докажите его в качестве упражнения).

Предложение 3.12. *Пусть X — метрическое пространство и $Y \subset X$.*

(i) *Если X полно и Y замкнуто в X, то Y полно.*
(ii) *Если Y полно, то Y замкнуто в X.*

Объединяя этот факт со следствием 3.11, получаем следующее.

Следствие 3.13. *Конечномерное векторное подпространство нормированного пространства замкнуто.*

Вот еще одно непосредственное следствие из предложений 3.9 и 3.12.

Следствие 3.14. *Пусть X и Y — нормированные пространства, причем X полно. Тогда любой топологически инъективный оператор $T\colon X \to Y$ имеет замкнутый образ.*

Вернемся к примерам банаховых пространств. Следующий пример знаком вам из курса анализа.

Пример 3.2. $\ell^\infty(X)$ — банахово пространство для любого множества X.

Поскольку предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций также является непрерывной функцией (см. курс анализа), получаем следующий пример.

Пример 3.3. Для любого топологического пространства X пространство $C_b(X)$ замкнуто в $\ell^\infty(X)$ и является, следовательно, банаховым пространством.

Упражнение 3.3. Для любого топологического пространства X пространство $C_0(X)$ замкнуто в $C_b(X)$ и является, следовательно, банаховым пространством. В частности, $c_0 = C_0(\mathbb{N})$ — банахово пространство.

Пример 3.4. Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Из курса анализа вы знаете, что пространства $L^1(X, \mu)$ и $L^2(X, \mu)$ полны. Точно так же доказывается, что пространство $L^p(X, \mu)$ полно для любого $p \in [1, +\infty)$. Для $p = \infty$ это утверждение тоже верно и доказывается еще проще (убедитесь!). Как следствие, пространство ℓ^p полно для любого $p \in [1, +\infty]$.

Упражнение 3.4. Полезное упражнение — доказать полноту пространств ℓ^p «в лоб», не используя общей теоремы о полноте пространств $L^p(X, \mu)$.

Обсудим теперь, какие из стандартных конструкций сохраняют полноту. Следующее предложение докажите сами в качестве упражнения (действуйте по той же схеме, что и в упражнении 3.4).

Предложение 3.15. *Пусть $(X_i)_{i \in I}$ — семейство банаховых пространств. Тогда $(\bigoplus X_i)_p$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$) и $(\bigoplus X_i)_0$ — банаховы пространства.*

Предложение 3.16. *Пусть X — банахово пространство и $X_0 \subset X$ — замкнутое векторное пространство. Тогда и X/X_0 — банахово пространство.*

Для доказательства предложения 3.16 удобно воспользоваться следующей леммой.

Лемма 3.17. *Следующие свойства нормированного пространства X эквивалентны:*

(i) *X полно;*
(ii) *если $x_1, x_2, \ldots \in X$ и $\sum_n \|x_n\| < \infty$, то ряд $\sum_n x_n$ сходится.*

Сходимость ряда в этой лемме понимается в том же смысле, что и сходимость числовых рядов: по определению, ряд в нормированном пространстве сходится, если сходится последовательность его частичных сумм. Докажите эту лемму сами в качестве упражнения; при доказательстве импликации (ii) $\Longrightarrow$ (i) выделите из произвольной фундаментальной последовательности (y_n) подпоследовательность (y_{n_k}), для которой $\|y_{n_k} - y_{n_{k-1}}\| \leqslant 1/2^k$, докажите ее сходимость и выведите отсюда сходимость последовательности (y_n).

Доказательство предложения 3.16. Пусть элементы $u_1, u_2, u_3, \ldots \in X/X_0$ таковы, что $\sum_n \|u_n\|^\wedge < \infty$. С учетом леммы 3.17 достаточно показать, что ряд $\sum_n u_n$ сходится в X/X_0. Обозначим через Q факторотображение X на X/X_0. По определению факторнормы, для каждого n существует такой $x_n \in Q^{-1}(u_n)$, что $\|x_n\| \leqslant \|u_n\|^\wedge + 1/2^n$. Тогда $\sum_n \|x_n\| < \infty$, поэтому в силу леммы 3.17 ряд $\sum_n x_n$ сходится к некоторому $x \in X$. Применяя отображение Q, получаем, что ряд $\sum_n u_n$ сходится к $Q(x)$. Следовательно, X/X_0 полно. □

Теорема 3.18. *Пусть X и Y — нормированные пространства, причем Y полно. Тогда и пространство $\mathscr{B}(X, Y)$ полно.*

Доказательство. Пусть (T_n) — фундаментальная последовательность в $\mathscr{B}(X, Y)$. Тогда $(T_n(x))$ — фундаментальная последовательность в Y для любого $x \in X$, поэтому она сходится. Положим $T(x) = \lim_n T_n(x)$. Получаем (очевидно, линейный) оператор $T \colon X \to Y$. Покажем, что T ограничен и $T_n \to T$ по норме. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\|T_n - T_m\| \leqslant \varepsilon$ при $n, m > N$. Тогда $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leqslant \varepsilon$ для любого $x \in \mathbb{B}_{1,X}$. Фиксируем $n > N$; тогда при $m \to \infty$ получим $\|T_n(x) - T(x)\| \leqslant \varepsilon$ для любого $x \in \mathbb{B}_{1,X}$. Отсюда следует, во-первых, что $T_n - T \in \mathscr{B}(X, Y)$, так что $T \in \mathscr{B}(X, Y)$, а во-вторых — что $\|T_n - T\| \leqslant \varepsilon$ при $n > N$. Значит, $T_n \to T$ по норме, и все доказано. □

Замечание 3.5. Приведенное выше доказательство полноты пространства $\mathscr{B}(X, Y)$ иллюстрирует общую схему, по которой доказывается полнота многих классических пространств, состоящих из отображений со значениями в банаховом пространстве Y — в частности, многих пространств $\mathbb{K}$-значных функций, таких, как $\ell^\infty(X)$ или ℓ^p. Сначала берется фундаментальная последовательность, доказывается, что последовательность ее значений в каждой точке фундаментальна, а значит, и сходится (так как Y полно). В итоге получается «кандидат на предел» — отображение, к которому наша последовательность сходится поточечно. А затем надо еще раз воспользоваться фундаментальностью последовательности и доказать, что этот «кандидат на предел» на самом деле лежит в нашем пространстве и наша последовательность сходится к нему по норме. Обычно два последних утверждения доказываются «одним махом», как и в предыдущей теореме.