А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ
Лекция 2

2.1. Топологические и метрические свойства линейных операторов

Операторы, о которых пойдет речь в следующем определении, являются аналитическими аналогами вложений. Вложения в функциональном анализе бывают двух типов: «топологические» и «метрические».

Определение 2.1. Пусть X и Y — нормированные пространства. Линейный оператор $T\colon X \to Y$ называется

(i) *топологически инъективным*, если он осуществляет гомеоморфизм между X и своим образом[1] $\operatorname{Im} T$;
(ii) *топологическим изоморфизмом*, если он топологически инъективен и сюръективен;
(iii) *изометрическим* (или *изометрией*), если $\|Tx\| = \|x\|$ для всех $x \in X$;
(iv) *изометрическим изоморфизмом*, если он изометричен и сюръективен.

Сделаем несколько несложных наблюдений, связанных с этим определением. Во-первых, ясно, что топологический изоморфизм обладает обратным, который также является топологическим изоморфизмом. Далее, любой изометрический линейный оператор $T\colon X \to Y$ инъективен, т.к. если $x \in \operatorname{Ker} T$, то $\|x\| = \|Tx\| = 0$, поэтому $x = 0$. Следовательно, изометрический изоморфизм обладает обратным, который также, очевидно, является изометрическим изоморфизмом.

Дадим теперь характеризацию топологически инъективных операторов в метрических терминах.

Предложение 2.1. *Следующие свойства оператора $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ эквивалентны:*

(i) *T топологически инъективен;*
(ii) *существует такое $c > 0$, что $\|Tx\| \geqslant c\|x\|$ для всех $x \in X$* (это свойство оператора иногда называют *ограниченностью снизу*).

Доказательство. Положим $Y_0 = \operatorname{Im} T$ и рассмотрим оператор $T_0\colon X \to Y_0$, $T_0(x) = T(x)$. Заметим, что каждое из условий (i) и (ii) влечет за собой инъективность оператора T, т.е. биективность оператора T_0. Имеем следующие эквивалентности:

$$
\begin{aligned}
\text{(i)} \iff T_0^{-1} \text{ непрерывен } &\iff \exists C > 0 : \|T_0^{-1} y\| \leqslant C\|y\| \ \forall y \in Y_0 \\
&\iff \exists C > 0 : \|x\| \leqslant C\|Tx\| \ \forall x \in X \\
&\iff \text{ выполнено (ii) с константой } c = 1/C. \qquad \square
\end{aligned}
$$

[1] Под *образом* линейного оператора $T\colon X \to Y$ мы всегда будем понимать его теоретико-множественный образ $\operatorname{Im} T = T(X)$. Следует иметь в виду, что это не то же самое, что образ в смысле теории категорий. Полезно проверить, что категорным образом морфизма T в категории нормированных пространств $\mathscr{N}orm$ или $\mathscr{N}orm_1$ (см. замечание 2.2) является замыкание множества $T(X)$.

Следствие 2.2. *Изометрический линейный оператор топологически инъективен. В частности, изометрический изоморфизм является топологическим изоморфизмом.*

Обсудим теперь операторы, которые являются аналитическими аналогами сюръекций. Как и в случае с инъекциями, сюръекции в функциональном анализе бывают двух типов.

Определение 2.2. Пусть X и Y — нормированные пространства. Линейный оператор $T\colon X \to Y$ называется

(i) *открытым*, если для любого открытого множества $U \subset X$ множество $T(U)$ открыто в Y;

(ii) *коизометрическим* (или *коизометрией*), если $T(\mathbb{B}^\circ_{1,X}) = \mathbb{B}^\circ_{1,Y}$.

Чтобы увидеть связь между этими двумя понятиями, дадим несколько эквивалентных описаний открытых операторов.

Предложение 2.3. *Следующие свойства линейного оператора $T\colon X \to Y$ эквивалентны:*

(i) *T открыт;*

(ii) *$T(\mathbb{B}^\circ_1) \supset \mathbb{B}^\circ_r$ для некоторого $r > 0$;*

(iii) *существует такое $C > 0$, что для каждого $y \in Y$ найдется такой $x \in X$, что $Tx = y$ и $\|x\| \leqslant C\|y\|$.*

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii): очевидно.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Зафиксируем $y \in Y$, $y \neq 0$, и положим $y' = (r/2\|y\|)\, y$. Очевидно, $y' \in \mathbb{B}^\circ_{r,Y}$, поэтому $y' = Tx'$ для некоторого $x' \in \mathbb{B}^\circ_{1,X}$. Положим $x = (2\|y\|/r)\, x'$; тогда $Tx = y$ и $\|x\| \leqslant (2/r)\|y\|$. Ясно, что для $y = 0$ свойство (iii) также выполнено.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): очевидно (достаточно положить $r = 1/C$).

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Пусть $U \subset X$ — открытое подмножество и $x \in U$. Достаточно показать, что Tx — внутренняя точка множества $T(U)$. Подберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $x + \varepsilon\mathbb{B}^\circ_1 \subset U$; тогда $T(U) \supset Tx + \varepsilon T(\mathbb{B}^\circ_1) \supset Tx + \mathbb{B}^\circ_{\varepsilon r}$, так что Tx — внутренняя точка $T(U)$. □

Следствие 2.4. *Коизометрический линейный оператор открыт, а открытый линейный оператор сюръективен.*

Наблюдение 2.5. Отметим тот очевидный факт, что если оператор $T\colon X \to Y$ изометричен и $X \neq 0$, то $\|T\| = 1$. То же самое равенство верно и для коизометрического оператора $T\colon X \to Y$ при условии, что $Y \neq 0$. В самом деле, из равенства $T(\mathbb{B}^\circ_{1,X}) = \mathbb{B}^\circ_{1,Y}$ по непрерывности следует включение $T(\mathbb{B}_{1,X}) \subset \mathbb{B}_{1,Y}$, которое дает оценку $\|T\| \leqslant 1$. С другой стороны, если бы норма T была меньше 1, то включение $T(\mathbb{B}^\circ_{1,X}) \subset \mathbb{B}^\circ_{\|T\|,Y}$ противоречило бы определению коизометрии. Следовательно, $\|T\| = 1$.

Замечание 2.1. Операторы $T\colon X \to Y$, удовлетворяющие условию $T(\mathbb{B}_{1,X}) = \mathbb{B}_{1,Y}$, называются иногда *строгими коизометриями.* Можно проверить, что всякая строгая коизометрия является коизометрией, но не наоборот (см. задачу 2.10 из листка 2).

Замечание 2.2. Операторы, о которых шла речь выше, можно интерпретировать в терминах теории категорий. А именно, рассмотрим категорию $\mathscr{N}orm$, объектами которой являются нормированные пространства, а морфизмами — ограниченные линейные операторы. Тогда изоморфизмы в этой категории — это в точности топологические изоморфизмы, мономорфизмы — инъективные операторы, эпиморфизмы — операторы с плотным образом, ядра — топологически инъективные операторы с замкнутым образом и коядра — открытые операторы. Рассмотрим теперь еще одну категорию $\mathscr{N}orm_1$, объекты которой — это по-прежнему нормированные пространства, а морфизмы — *линейные сжатия*, т.е. линейные операторы T со свойством $\|T\| \leqslant 1$. Тогда изоморфизмы в этой категории — это в точности изометрические изоморфизмы, мономорфизмы — инъективные операторы, эпиморфизмы — операторы с плотным образом, ядра — изометрические операторы с замкнутым образом и коядра — коизометрические операторы. Попробуйте доказать все эти утверждения (прочитав сперва параграф о факторпространствах; см. ниже).

Обсудим теперь несколько базовых примеров.

2.2. Примеры ограниченных линейных операторов

Пример 2.1. Обозначим через $\mathbf{1}_X$ тождественный оператор в нормированном пространстве X. Очевидно, он ограничен и $\|\mathbf{1}_X\| = 1$.

Пример 2.2 (*диагональный оператор*)**.** Пусть $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ — ограниченная последовательность, т.е. элемент пространства ℓ^∞. Пусть X — какое-либо из пространств последовательностей ℓ^p (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$) или c_0.

Предложение 2.6. *Для любого $x \in X$ последовательность $\lambda x = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$ также принадлежит X, и отображение $M_\lambda \colon X \to X$, $x \mapsto \lambda x$, является ограниченным линейным оператором. При этом $\|M_\lambda\| = \|\lambda\|_\infty$.*

Доказательство. Проведем доказательство для $X = \ell^p$ при $p < \infty$ (для ℓ^∞ и c_0 все делается аналогично). Для каждого $x \in \ell^p$ имеем

$$\sum_i |\lambda_i x_i|^p \leqslant \sup_i |\lambda_i|^p \sum_i |x_i|^p = \|\lambda\|_\infty^p \|x\|_p^p\,.$$

Следовательно, ряд в левой части неравенства сходится, так что $\lambda x \in \ell^p$, и определен (очевидно, линейный) оператор $M_\lambda \colon \ell^p \to \ell^p$. Из того же неравенства видно, что $\|M_\lambda\| \leqslant \|\lambda\|_\infty$. Обозначим через e_i последовательность с единицей на i-ом месте и нулем на остальных. Тогда

$$\|M_\lambda\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|M_\lambda x\| \geqslant \sup_{i \in \mathbb{N}} \|M_\lambda e_i\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} \|\lambda_i e_i\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\lambda_i| = \|\lambda\|_\infty.$$

Отсюда получаем требуемое равенство $\|M_\lambda\| = \|\lambda\|_\infty$. □

Оператор M_λ называется *диагональным оператором* в X.

Замечание 2.3. Из проведенного доказательства видно, что для ограниченного оператора T не обязательно существует такой ненулевой вектор x, что $\|Tx\| = \|T\|\|x\|$. Если такое все же случилось, то говорят, что оператор *достигает нормы.* А в общем случае можно лишь гарантировать, что для каждого $\delta > 0$ найдется такой ненулевой x_δ, что $\|Tx_\delta\| \geqslant (\|T\| - \delta)\|x_\delta\|$.

Пример 2.3 (*операторы сдвига*)**.** Пусть X — любое из пространств ℓ^p или c_0, как и в предыдущем примере. Рассмотрим операторы

$$\begin{aligned} &T_r\colon X\to X, && T_r(x)=(0,x_1,x_2,\ldots) && (\text{оператор } \textit{правого сдвига}),\\ &T_\ell\colon X\to X, && T_\ell(x)=(x_2,x_3,\ldots) && (\text{оператор } \textit{левого сдвига}). \end{aligned}$$

Ясно, что они оба линейны и ограничены. Оператор T_r, очевидно, изометричен, поэтому $\|T_r\|=1$. Оператор же T_ℓ, как нетрудно проверить, коизометричен (проверьте!), поэтому $\|T_\ell\|=1$.

Если в качестве X взять пространство «двусторонних» последовательностей $\ell^p(\mathbb{Z})$ или $c_0(\mathbb{Z})$, то можно определить оператор

$$T_b\colon X\to X,\quad (T_b(x))_i=x_{i-1}\quad (\text{оператор } \textit{двустороннего сдвига}).$$

Очевидно, он изометричен и имеет поэтому норму 1.

Операторы, аналогичные оператору двустороннего сдвига, можно определить во многих других пространствах функций на группах. Пусть, например, X — это одно из пространств $C_b(\mathbb{R})$, $C_0(\mathbb{R})$ или $L^p(\mathbb{R})$ (относительно меры Лебега); тогда для каждого $a\in\mathbb{R}$ определен изометрический оператор

$$T_a\colon X\to X,\quad (T_af)(t)=f(t-a).$$

Изометричность этого оператора (в случае $X=L^p(\mathbb{R})$ при $p<\infty$) следует из инвариантности меры Лебега относительно сдвигов.

Вместо группы $\mathbb{R}$ можно взять единичную окружность $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$, снабженную нормализованной мерой Лебега[1]. Если X — это одно из пространств $C(\mathbb{T})$ или $L^p(\mathbb{T})$, то для каждого $\zeta\in\mathbb{T}$ определен изометрический оператор

$$T_\zeta\colon X\to X,\quad (T_\zeta f)(z)=f(\zeta^{-1}z).$$

Изометричность этого оператора (в случае $X=L^p(\mathbb{T})$ при $p<\infty$) следует из инвариантности меры Лебега относительно поворотов окружности.

Замечание 2.4. Отметим, что для $G=\mathbb{R}$ или $G=\mathbb{T}$ сопоставление каждому $g\in G$ оператора сдвига T_g является представлением G в X; оно называется *регулярным представлением.* Аналогичную конструкцию можно проделать для любой локально компактной топологической группы G, снабженной так называемой *мерой Хаара* — регулярной борелевской мерой, инвариантной относительно левых сдвигов. Существование и единственность (с точностью до множителя) такой меры — это весьма глубокая теорема, доказанная в разное время и в разной степени общности А. Хааром, Дж. фон Нойманном и А. Вейлем. Впрочем, для групп Ли меру Хаара построить довольно легко; знакомые с группами Ли могут попробовать сделать это в качестве упражнения.

Пример 2.4 (*оператор умножения* в $C_b(X)$)**.** Пусть X — топологическое пространство и $f\in C_b(X)$. *Оператор умножения* $M_f\colon C_b(X)\to C_b(X)$ действует по формуле $M_f(g)=fg$ (где $g\in C_b(X)$). Легко проверить (проверьте), что оператор M_f ограничен и $\|M_f\|=\|f\|_\infty$. Обратите внимание, что при $X=\mathbb{N}$ оператор M_f — это в точности диагональный оператор из примера 2.2.

[1]Это означает, что мы переносим меру Лебега с полуинтервала $[0,2\pi)$ на $\mathbb{T}$ посредством отображения $t\mapsto e^{it}$, а потом нормируем ее, т.е. делим на 2π, чтобы мера всей окружности равнялась 1.

Пример 2.5 (*оператор умножения* в $L^p(X,\mu)$)**.** Пусть (X,μ) — пространство с мерой и $f \in L^\infty(X,\mu)$. Зафиксируем произвольное $p \in [1,+\infty]$. *Оператор умножения* $M_f \colon L^p(X,\mu) \to L^p(X,\mu)$ действует по той же формуле, что и в предыдущем примере. Можно проверить (проверьте), что оператор M_f ограничен и $\|M_f\| = \|f\|_{L^\infty}$. Обратите внимание, что при $X = \mathbb{N}$ (со считающей мерой) мы снова получаем диагональный оператор из примера 2.2.

Отметим, что диагональный оператор и оператор умножения — это больше чем просто примеры. Через некоторое время мы увидим, что при $p = 2$ они служат моделями для весьма важных классов операторов — *нормальных* и *нормальных компактных* операторов в гильбертовом пространстве.

Следующий класс операторов также играет весьма важную роль как в общей теории, так и в приложениях.

Определение 2.3. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, K — измеримая функция на $X \times X$ и E — некоторое векторное пространство функций на X. *Интегральным оператором* на E называется оператор вида

$$T_K \colon E \to E, \quad (T_K f)(x) = \int_X K(x,y) f(y)\, d\mu(y). \tag{2.1}$$

Функцию K иногда называют *ядром*[1] оператора T_K.

Обратите внимание, что формула (2.1) — это обобщение формулы умножения матрицы на столбец. В самом деле, если $X = \{1,\ldots,n\}$ и μ — считающая мера, то K — это просто квадратная $n\times n$-матрица, функция f — столбец чисел, а оператор T_K действует по формуле $(T_K f)_i = \sum_j K_{ij} f_j$.

Важный частный случай интегральных операторов — это так называемые операторы Вольтерра.

Определение 2.4. Пусть $I = [a,b]$ — отрезок с мерой Лебега, K — измеримая функция на $I\times I$ и E — некоторое векторное пространство функций на I. *Оператором Вольтерра* на E называется оператор вида

$$V_K \colon E \to E, \quad (V_K f)(x) = \int_a^x K(x,y) f(y)\, dy.$$

Заметим, что $V_K = T_{\tilde K}$, где функция $\tilde K$ определена формулой

$$\tilde K(x,y) = \begin{cases} K(x,y), & \text{если } y \leqslant x,\\ 0, & \text{если } y > x. \end{cases}$$

Разумеется, чтобы оператор T_K (или V_K) был определен, следует наложить на функцию K и пространство E определенные условия. Вот два конкретных примера.

Пример 2.6. Пусть $I = [0,1]$ (с мерой Лебега) и $K \in C(I \times I)$. Нетрудно проверить (проверьте), что формула (2.1) задает ограниченный линейный оператор $T_K \colon C(I) \to C(I)$, причем $\|T_K\| \leqslant \|K\|_\infty$. Аналогичное утверждение справедливо и для оператора Вольтерра $V_K \colon C(I) \to C(I)$.

[1] Хотя она и не имеет ничего общего с подпространством $\operatorname{Ker} T_K$; в данном случае термин «ядро» — это просто дань традиции.

Пример 2.7. Пусть (X, μ) — пространство с мерой и $K \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$. Используя теорему Фубини, можно показать (покажите), что для каждой $f \in L^2(X, \mu)$ интеграл в правой части равенства (2.1) существует для почти всех $x \in X$ и определяет функцию $T_K f \in L^2(X, \mu)$. Таким образом, получаем линейный оператор $T_K \colon L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu)$. Можно проверить (проверьте), что он ограничен, и что $\|T_K\| \leqslant \|K\|_2$.

Последний пример также является модельным — на этот раз для так называемых *операторов Гильберта–Шмидта*.