А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 1

1.1. Введение

По-видимому, не существует единого общепринятого мнения о том, что такое функциональный анализ. Наиболее широкая точка зрения состоит в том, что *основным предметом функционального анализа следует считать объекты, наделенные согласованными алгебраической и топологической структурами* (цит. по А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани, «Теоремы и задачи функционального анализа», М.: Наука, 1988)[1]. В качестве простейшего примера рассмотрим хорошо вам знакомое пространство $\mathbb{R}^n$. Во-первых, оно является векторным пространством над полем $\mathbb{R}$. Во-вторых, на нем есть стандартная топология, относительно которой операции сложения и умножения на скаляр непрерывны; это означает, что $\mathbb{R}^n$ — *топологическое векторное пространство.* Кроме того, у каждого вектора $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ есть евклидова длина (или *норма*), обозначаемая через $\|x\|$ и равная $(\sum_i x_i^2)^{1/2}$. Эта норма задает обычную евклидову метрику $\rho(x, y) = \|x - y\|$, которая, в свою очередь, порождает стандартную топологию на $\mathbb{R}^n$. Это означает, что $\mathbb{R}^n$ — не просто топологическое векторное пространство, а *нормированное пространство.* Более того, это пространство полно, т.е. любая фундаментальная последовательность в нем сходится; нормированные пространства с этим свойством называют *банаховыми пространствами.* Наконец, для любых двух векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ определено их *скалярное произведение* $\langle x, y\rangle = \sum_i x_i y_i$, которое порождает евклидову норму по формуле $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$. Это означает, что $\mathbb{R}^n$ — не просто банахово пространство, а *гильбертово пространство*[2].

Приведенный пример в какой-то мере иллюстрирует понятия, которыми мы будем заниматься, однако он слишком уж «игрушечный». Почему? Дело в том, что с точки зрения функционального анализа конечномерные пространства не слишком-то интересны. Во-первых, как мы покажем через некоторое время, на конечномерном векторном пространстве есть только одна топология, относительно которой оно будет хаусдорфовым топологическим векторным пространством, — а именно, вышеупомянутая стандартная топология. Поэтому конечномерные векторные пространства с точки зрения функционального анализа почти настолько же просты, насколько они просты с точки зрения линейной алгебры[3]. А во-вторых, хотя методы функционального анализа при-

[1] Следует все же уточнить, что алгебраическая структура, имеющаяся на объектах функционального анализа, обычно *линейна*, т.е. включает в себя структуру векторного пространства над полем $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или над каким-либо другим нормированным полем. Что же касается таких общих объектов, как, например, топологические группы и топологические кольца (без линейной структуры), то их изучает *топологическая алгебра* — раздел математики, который, как правило, не относят к функциональному анализу.

[2] На самом деле гильбертовы пространства обычно рассматриваются над полем комплексных чисел, так что более естественный пример гильбертова пространства — не $\mathbb{R}^n$, а $\mathbb{C}^n$.

[3] Справедливости ради отметим, что конечномерные пространства все же играют заметную роль в так называемой *локальной теории* банаховых пространств — науке, изучающей бесконечномерные

менимы в том числе и к конечномерным пространствам, они в сущности не дают ничего нового — почти все интересные результаты о конечномерных пространствах можно получить методами линейной алгебры и классического анализа. Поэтому функциональный анализ имеет дело преимущественно с бесконечномерными пространствами.

Наряду с банаховыми, гильбертовыми и топологическими векторными пространствами, в функциональном анализе изучаются различные операторы между этими пространствами — линейные, нелинейные, ограниченные, неограниченные... На самом деле операторы, пожалуй, даже важнее, чем пространства, в которых они действуют. Отчасти это обусловлено всевозможными приложениями функционального анализа в смежных областях математики и математической физики. Часто бывает так, что задан какой-то оператор (например, дифференциальный или интегральный), и специально для его изучения строится некое пространство, в котором он действует. Так возникли, например, знаменитые пространства Соболева, играющие важную роль в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Несмотря на абстрактность объектов, изучаемых в функциональном анализе, не следует думать, что такие понятия, как банахово пространство, топологическое векторное пространство и т.п. были придуманы «из любви к искусству», просто чтобы обобщить известные свойства пространства $\mathbb{R}^n$. На самом деле функциональный анализ, как и большинство абстрактных математических дисциплин, имеет свои корни в конкретных задачах классической математики и математической физики. Одна из таких задач — задача о распространении тепла, изучавшаяся Ж.-Б. Фурье в начале XIX в. Идея Фурье состояла в том, чтобы искать неизвестную функцию — т.е. решение уравнения теплопроводности — в виде суммы ряда из «элементарных гармоник», т.е. функций $\cos nx$ и $\sin nx$, с неопределенными коэффициентами a_n, b_n (зависящими от времени). Эта идея привела к общей теории рядов Фурье, в которой функции вещественного переменного сопоставляется последовательность чисел (c_n) (называемых коэффициентами Фурье данной функции), удовлетворяющая условию $\sum_n c_n^2 < \infty$ и содержащая в себе в сущности всю информацию об этой функции. Позднее — в начале XX в. — возникла идея о том, что для решения конкретных задач полезно рассмотреть множество всех таких последовательностей (теперь оно обозначается символом ℓ^2) и изучить его геометрические свойства. Помимо теории рядов Фурье, основными стимулами для изучения этого пространства послужили некоторые вопросы теории квадратичных форм и теории интегральных уравнений. В течение некоторого времени пространство ℓ^2 называли «гильбертовым пространством»[1]; позднее (с легкой руки Дж. фонНоймана) этот термин закрепился за более абстрактными пространствами со скалярным произведением.

Более подробно о конкретных задачах, из которых вырос функциональный анализ, можно прочитать в статье Ю. И. Любича «Линейный функциональный анализ» (Итоги науки и техники, современные проблемы математики, фундаментальные направления, т. 19, М.: ВИНИТИ, 1988).

Несколько слов об истории возникновения функционального анализа. Считается, что в самостоятельную дисциплину он начал оформляться в начале XX в. благодаря

банаховы пространства в терминах метрических свойств их конечномерных подпространств.

[1]Существует легенда, согласно которой Г. Вейль, делая доклад на математическом семинаре в Геттингене, несколько раз упомянул термин «гильбертово пространство». После окончания доклада Гильберт подошел к докладчику и сказал: «Я не понял только одно: а что же такое гильбертово пространство?».

работам И. Фредгольма, Д. Гильберта и Э. Шмидта по интегральным уравнениям и квадратичным формам, Ф. Рисса и Э. Фишера по функциональным пространствам, М. Фреше по общим метрическим пространствам. Существенную роль сыграли также работы А. Лебега по теории интегрирования. Однако, пожалуй, основной вклад в формирование функционального анализа внесли работы С. Банаха 1920-х–1930-х гг. и в особенности его знаменитая монография «Теория линейных операций», опубликованная в 1932 г. (но переведенная на русский язык лишь в 2001 г.) Именно в работах Банаха появились общие понятия нормированного и банахова пространств (сам Банах называл последние «(B)-пространствами») и были доказаны фундаментальные результаты об этих пространствах и операторах между ними. Из многочисленных разделов функционального анализа, появившихся впоследствии, выделим спектральную теорию операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения в квантовой механике (основы этой теории были заложены еще Гильбертом, но законченный вид она приобрела в работах Дж. фон Ноймана 1930-х гг.), теорию операторных полугрупп и ее приложения к дифференциальным уравнениям (Э. Хилле, Р. Филлипс, К. Иосида), теорию операторных алгебр и более общих банаховых алгебр (Ф. Мюррей, Дж. фон Нойманн, И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк, Г. Е. Шилов), эргодическую теорию (А. Н. Колмогоров, В. А. Рохлин, А. Я. Хинчин), теорию топологических векторных пространств (Ж. Дьедонне, Л. Шварц, А. Гротендик), теорию обобщенных функций (И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Н. Я. Виленкин, Л. Шварц)...

В настоящее время функциональный анализ представляет собой весьма обширную и разветвленную часть математики с разнообразными приложениями в смежных областях, таких, как дифференциальные уравнения, гармонический анализ, теория представлений групп, дифференциальная и комплексно-аналитическая геометрии, вычислительная математика, вариационное исчисление, теория оптимизации, теория вероятностей, квантовая физика. Многие разделы функционального анализа бурно развиваются и в настоящее время; из наиболее популярных и «модных» отметим некоммутативную геометрию в духе А. Конна и теорию локально компактных квантовых групп.

1.2. Нормированные пространства

Функциональный анализ имеет дело с векторными пространствами над полем действительных или комплексных чисел[1]. На первых порах будет все равно, какое из этих двух полей брать в качестве основного, поэтому мы будем использовать символ $\mathbb{K}$ для обозначения либо поля $\mathbb{R}$, либо поля $\mathbb{C}$.

Определение 1.1. Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{K}$. *Нормой* на X называется функция $X \to [0, +\infty)$, $x \mapsto \|x\|$, обладающая следующими свойствами:

1) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ для любых $\lambda \in \mathbb{K}$ и $x \in X$;

2) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in X$ (*неравенство треугольника*);

3) $\|x\| = 0$ только при $x = 0$.

[1]Есть, правда, и так называемый неархимедов функциональный анализ, в котором в качестве основного выбирается какое-нибудь неархимедово поле — например, поле p-адических чисел; но это уже другая наука со своей спецификой, и мы ею заниматься не будем.

Если выполнены только условия 1 и 2, то такая функция называется *полунормой*.

Нормированным пространством называется векторное пространство, снабженное нормой (точнее, пара $(X, \|\cdot\|)$, состоящая из векторного пространства X и нормы $\|\cdot\|$ на нем). Аналогично определяются и *полунормированные пространства*[1].

Если $\|\cdot\|$ — норма на X, то формула $\rho(x,y) = \|x-y\|$ задает метрику на X (проверьте!). Поэтому каждое нормированное пространство является метрическим и, в частности, обладает естественной топологией.

Примеры: нормы на конечномерных пространствах

Пример 1.1. Само поле $\mathbb{K}$ является нормированным пространством относительно нормы $\|x\| = |x|$. Из аксиом нормы следует, что это единственная норма на $\mathbb{K}$ с точностью до умножения на положительную константу.

Пример 1.2. Определим норму $\|\cdot\|_1$ на пространстве $\mathbb{K}^n$ формулой

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad (x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n).$$

Легко проверить (проверьте!), что норма $\|\cdot\|_1$ в самом деле является нормой. Полученное нормированное пространство $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1)$ будем сокращенно обозначать через $\mathbb{K}^n_1$.

Пример 1.3. Определим норму $\|\cdot\|_\infty$ на пространстве $\mathbb{K}^n$ формулой

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \qquad (x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n).$$

Легко проверить (проверьте!), что норма $\|\cdot\|_\infty$ в самом деле является нормой. Полученное нормированное пространство $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ будем сокращенно обозначать через $\mathbb{K}^n_\infty$.

Пример 1.4. Зафиксируем число $p \in (1, +\infty)$ и определим норму $\|\cdot\|_p$ на пространстве $\mathbb{K}^n$ формулой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \qquad (x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n).$$

В отличие от предыдущих примеров, здесь уже не столь очевидно, что норма $\|\cdot\|_p$ удовлетворяет неравенству треугольника. Неравенство треугольника применительно к норме $\|\cdot\|_p$ называется *неравенством Минковского*; его доказательство мы разберем на семинаре (см. листок 1). Полученное нормированное пространство $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ будем сокращенно обозначать через $\mathbb{K}^n_p$. Отметим, что $\mathbb{R}^2_2$ и $\mathbb{R}^3_2$ — это обычные евклидова плоскость и трехмерное евклидово пространство.

[1] На первых порах полунормы, не являющиеся нормами, будут встречаться нам довольно редко; однако впоследствии, когда мы будем изучать более общие топологические векторные пространства, полунормы начнут играть весьма важную роль.

Примеры: пространства последовательностей

Обозначим через $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ векторное пространство всех числовых последовательностей $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ с обычными покоординатными операциями. На само́м этом пространстве никакой естественной нормы нет, однако она есть на некоторых его подпространствах.

Пример 1.5. Зафиксируем число $p \in [1, +\infty)$ и положим

$$\ell^p = \Big\{ x = (x_i) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \Big\}.$$

Из неравенства Минковского следует, что ℓ^p — векторное подпространство в $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ и что формула

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} \qquad (x = (x_i) \in \ell^p)$$

задает норму на ℓ^p (обратите внимание, что при $p = 1$ эти два утверждения очевидны.) Следовательно, ℓ^p — нормированное пространство.

Разумеется, в примере 1.5 вместо последовательностей можно рассматривать функции, заданные на любом счетном множестве I; в результате получатся пространства, обозначаемые через $\ell^p(I)$. (На самом деле в качестве I можно брать множество произвольной мощности, но это мы обсудим несколько позже.)

Пример 1.6. Обозначим через ℓ^∞ подпространство в $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, состоящее из всех ограниченных последовательностей. Оно является нормированным пространством относительно *равномерной нормы*

$$\|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| \qquad (x = (x_i) \in \ell^\infty).$$

Пример 1.7. Символом c_0 обозначается множество всех числовых последовательностей, стремящихся к нулю на бесконечности. Очевидно, c_0 — векторное подпространство в ℓ^∞, поэтому оно является нормированным пространством относительно равномерной нормы.

Примеры: пространства функций

Пример 1.8. Для произвольного множества X обозначим через $\ell^\infty(X)$ векторное пространство всех ограниченных $\mathbb{K}$-значных функций на X. Оно является нормированным пространством относительно *равномерной нормы*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)| \qquad (f \in \ell^\infty(X)).$$

Отметим, что $\ell^\infty(\mathbb{N}) = \ell^\infty$ (см. пример 1.6). Нетрудно проверить (проверьте!), что последовательность ограниченных функций сходится по равномерной норме тогда и только тогда, когда она сходится равномерно (см. курс матанализа).

Пример 1.9. Если X — топологическое пространство, то множество $C_b(X)$ всех непрерывных ограниченных $\mathbb{K}$-значных функций на X является векторным подпространством в $\ell^\infty(X)$. Следовательно, $C_b(X)$ — нормированное пространство относительно равномерной нормы. Отметим, что если X компактно, то $C_b(X) = C(X)$, а если X дискретно, то $C_b(X) = \ell^\infty(X)$.

Следующий пример может показаться несколько искусственным, однако он играет важную роль, например, в теории банаховых алгебр и в теории преобразования Фурье, с которыми нам еще предстоит познакомиться.

Пример 1.10. Пусть X — топологическое пространство. Говорят, что функция $f\colon X \to \mathbb{K}$ *исчезает на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт $K \subset X$, что $|f(x)| < \varepsilon$ для всех $x \notin K$. Пространство всех непрерывных исчезающих на бесконечности функций на X обозначается через $C_0(X)$. Очевидно, $C_0(X) \subset C_b(X)$, и поэтому $C_0(X)$ является нормированным пространством относительно равномерной нормы. Ясно, что если X компактно, то $C_0(X) = C_b(X) = C(X)$. Нетрудно проверить (проверьте), что $C_0(\mathbb{N}) = c_0$ (см. пример 1.7).

Пример 1.11. Для $p \in \mathbb{N}$ пространство $C^p[a,b]$ по умолчанию снабжается нормой

$$\|f\| = \max_{0 \leqslant k \leqslant p} \|f^{(k)}\|_\infty.$$

По ряду причин она более естественна для этого пространства, чем, скажем, равномерная норма. Отметим, что последовательность функций (f_n) сходится к функции f в топологии пространства $C^p[a,b]$ тогда и только тогда, когда производные $(f_n^{(k)})$ равномерно сходятся к $f^{(k)}$ для всех $k = 0, \ldots, p$.

В качестве упражнения полезно попробовать определить норму на пространстве $C^p(M)$, где M — компактное C^p-многообразие. Отметим, что на пространствах бесконечно дифференцируемых функций никакой естественной нормы нет (хотя на них и есть естественная топология, с которой мы познакомимся, когда будем изучать топологические векторные пространства).

Прежде чем переходить к дальнейшим примерам, обсудим одну несложную конструкцию. Пусть X — *полунормированное пространство*, т.е. векторное пространство, снабженное полунормой. Нетрудно убедиться (убедитесь!), что множество

$$N = \{x \in X : \|x\| = 0\}$$

является векторным подпространством в X, и что формула

$$\|x + N\|^\wedge = \|x\| \qquad (x \in X)$$

корректно определяет норму на факторпространстве X/N.

Определение 1.2. Нормированное пространство $(X/N, \|\cdot\|^\wedge)$ называется *нормированным пространством, ассоциированным с X*.

Приведем теперь несколько важных примеров нормированных пространств, определяемых в терминах интеграла Лебега. Сначала условимся о следующей терминологии. Под *пространством с мерой* мы будем понимать тройку $(X, \mathscr{A}, \mu)$, где X — множество, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра его подмножеств, а $\mu\colon \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ — σ-аддитивная мера на $\mathscr{A}$. Для простоты будем предполагать, что мера μ *σ-конечна*; это означает, что X является не более чем счетным объединением множеств конечной меры. Как правило, вместо $(X, \mathscr{A}, \mu)$ мы будем писать просто (X, μ), не указывая σ-алгебру $\mathscr{A}$ в явном виде; к путанице это не приведет.

Пример 1.12. Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Зафиксируем число $p \in [1, +\infty)$ и положим

$$\mathscr{L}^p(X, \mu) = \Big\{ f\colon X \to \mathbb{K} : f \text{ измерима и } |f|^p \text{ интегрируема} \Big\}.$$

Из *неравенства Минковского* для функций (см. листок 1) следует, что $\mathscr{L}^p(X, \mu)$ — векторное подпространство в пространстве всех $\mathbb{K}$-значных функций на X, и что формула

$$\|f\|_p = \Big(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \Big)^{1/p}$$

задает полунорму на $\mathscr{L}^p(X, \mu)$ (разумеется, при $p = 1$ эти два утверждения очевидны.) Нормированное пространство, ассоциированное с $\mathscr{L}^p(X, \mu)$, обозначается через $L^p(X, \mu)$.

Напомним, что интеграл от неотрицательной функции равен нулю тогда и только тогда, когда эта функция равна нулю почти всюду (т.е. всюду, за исключением множества меры нуль). Поэтому для $f \in \mathscr{L}^p(X, \mu)$ условия $\|f\|_p = 0$ и $f = 0$ п.в. эквивалентны. Следовательно,

$$L^p(X, \mu) = \mathscr{L}^p(X, \mu) / \{ f : f = 0 \text{ п.в.} \}.$$

Таким образом, пространство $L^p(X, \mu)$ состоит из классов эквивалентности функций из пространства $\mathscr{L}^p(X, \mu)$, где отношение эквивалентности — это равенство почти всюду. Тем не менее, при работе с L^p-пространствами удобно позволять себе некоторую вольность речи и называть элементы этих пространств «функциями», помня при этом, что две функции равны как элементы пространства $L^p(X, \mu)$ тогда и только тогда, когда они равны почти всюду. Эта вольность речи является общепринятой и не приводит к недоразумениям, поэтому мы в дальнейшем без особых оговорок будем использовать речевой оборот «функция из $L^p(X, \mu)$».

Пример 1.13. Пусть, как и в предыдущем примере, (X, μ) — пространство с мерой. Измеримая функция $f\colon X \to \mathbb{K}$ называется *существенно ограниченной*, если она ограничена на некотором множестве $E \subset X$, удовлетворяющем условию $\mu(X \setminus E) = 0$. (По-другому можно сказать и так: функция существенно ограничена, если она эквивалентна ограниченной.) Положим

$$\mathscr{L}^\infty(X, \mu) = \Big\{ f\colon X \to \mathbb{K} : f \text{ измерима и существенно ограничена} \Big\}.$$

Существенной верхней гранью вещественной функции $f \in \mathscr{L}^\infty(X, \mu)$ называется величина

$$\operatorname{ess\,sup} f = \inf \Big\{ \sup_{x \in E} f(x) : E \subset X, \ \mu(X \setminus E) = 0 \Big\}.$$

Нетрудно проверить (проверьте), что $\mathscr{L}^\infty(X,\mu)$ — векторное подпространство в пространстве всех $\mathbb{K}$-значных функций на X, и что формула

$$\|f\| = \operatorname{ess\,sup} |f|$$

задает полунорму на $\mathscr{L}^\infty(X,\mu)$. Ассоциированное с $\mathscr{L}^\infty(X,\mu)$ нормированное пространство обозначается через $L^\infty(X,\mu)$.

Как и в предыдущем примере, легко проверить (по поводу подробностей см. задачи из листка 1), что для $f \in \mathscr{L}^\infty(X,\mu)$ условия $\|f\| = 0$ и $f = 0$ п.в. эквивалентны. Следовательно,

$$L^\infty(X,\mu) = \mathscr{L}^\infty(X,\mu)/\{f : f = 0 \text{ п.в.}\}.$$

При работе с L^∞-пространствами мы будем следовать тому же соглашению, что и в случае L^p-пространств, а именно, рассматривать элементы этих пространств как функции с точностью до равенства почти всюду.

Замечание 1.1. Отметим, что для всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$ пространства ℓ^p — это частный случай пространств $L^p(X,\mu)$. В самом деле, определим *считающую меру* μ на $2^{\mathbb{N}}$ формулой

$$\mu(A) = \text{число элементов в } A.$$

Нетрудно проверить (проверьте!), что $\mathscr{L}^p(\mathbb{N},\mu) = L^p(\mathbb{N},\mu) = \ell^p$.

1.3. Ограниченные линейные операторы

В курсе алгебры вы познакомились с языком категорий и функторов. Этот язык удобен для использования практически в любой области современной математики, и функциональный анализ — не исключение. Одна из основных категорий функционального анализа — категория нормированных пространств, объектами которой являются, разумеется, нормированные пространства, а роль морфизмов играют *ограниченные линейные операторы*, которые мы сейчас определим.

Определение 1.3. Пусть X, Y — нормированные пространства. Линейный оператор $T\colon X \to Y$ называется *ограниченным*, если существует такое $C \geqslant 0$, что $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$ для всех $x \in X$.

Условие ограниченности оператора можно выразить и в несколько других терминах. Для этого удобно ввести следующие обозначения. Для нормированного пространства X и $r > 0$ положим

$$\mathbb{B}_{r,X} = \{x \in X : \|x\| \leqslant r\}, \quad \mathbb{B}^\circ_{r,X} = \{x \in X : \|x\| < r\}, \quad \mathbb{S}_{r,X} = \{x \in X : \|x\| = 1\}.$$

Таким образом, $\mathbb{B}_{r,X}$ и $\mathbb{B}^\circ_{r,X}$ — это соответственно замкнутый и открытый шары, а $\mathbb{S}_{r,X}$ — сфера радиуса r с центром в нуле. Если пространство X фиксировано, то мы часто будем обозначать эти множества просто $\mathbb{B}_r$, $\mathbb{B}^\circ_r$ и $\mathbb{S}_r$. При $r = 1$ они называются *единичными шарами* (соответственно, *единичной сферой*) пространства X.

Предложение 1.1. *Для линейного оператора $T\colon X \to Y$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *T ограничен;*
(ii) *множество $T(B) \subset Y$ ограничено для любого ограниченного множества $B \subset X$;*
(iii) *множество $T(\mathbb{B}_1) \subset Y$ ограничено;*
(iv) *множество $T(\mathbb{S}_1) \subset Y$ ограничено.*

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Пусть оператор T ограничен, т.е. $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$ для всех $x \in X$. Если $B \subset X$ — ограниченное множество, то $B \subset \mathbb{B}_r$ для некоторого $r > 0$, и поэтому $T(B) \subset T(\mathbb{B}_r) \subset \mathbb{B}_{Cr}$. Следовательно, множество $T(B)$ ограничено.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv): очевидно.

(iv) $\Longrightarrow$ (i). Предположим, что множество $T(\mathbb{S}_1)$ ограничено. Это означает, что $T(\mathbb{S}_1) \subset \mathbb{B}_C$ для некоторого $C \geqslant 0$, т.е. $\|Tx\| \leqslant C$ для всех $\|x\| = 1$. Возьмем теперь произвольный $x \in X$, $x \neq 0$, и положим $x_0 = x/\|x\|$. Тогда $\|x_0\| = 1$, поэтому $\|Tx_0\| \leqslant C$, откуда после умножения на $\|x\|$ получаем $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$. Ясно, что для $x = 0$ полученное неравенство также выполнено. $\square$

Замечание 1.2. Замена вектора x на вектор $x/\|x\|$, которую мы проделали в доказательстве, называется *нормировкой* этого вектора. Прием нормировки используется в функциональном анализе на каждом шагу; в дальнейшем мы часто будем его применять без каких-либо особых оговорок.

Теорема 1.2. *Для линейного оператора $T\colon X \to Y$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *T ограничен;*
(ii) *T непрерывен в нуле;*
(iii) *T непрерывен.*

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (iii). Пусть $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$ для всех $x \in X$. Если $x_n \to x$ в X, то

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leqslant C\|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

т.е. $Tx_n \to Tx$ в Y. Следовательно, T непрерывен.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): очевидно.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Пусть T неограничен; тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такой вектор $x_n \in \mathbb{B}_{1,X}$, что $\|Tx_n\| > n^2$. Положим $y_n = x_n/n$; тогда $\|y_n\| \leqslant 1/n$, поэтому $y_n \to 0$ в X. С другой стороны, $\|Ty_n\| = \|Tx_n\|/n > n \to \infty$, поэтому $Ty_n \not\to 0$ в Y. Это противоречит непрерывности оператора T в нуле. $\square$

Доказанная теорема позволяет, в частности, сравнивать между собой разные нормы, заданные на одном и том же векторном пространстве.

Определение 1.4. Пусть $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ — нормы на векторном пространстве X, и пусть $\mathscr{T}'$ и $\mathscr{T}''$ — задаваемые ими топологии на X. Говорят, что норма $\|\cdot\|'$ *мажорируется* нормой $\|\cdot\|''$ (и пишут $\|\cdot\|' \prec \|\cdot\|''$), если топология $\mathscr{T}'$ не сильнее, чем $\mathscr{T}''$ (т.е. $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}''$). Если же эти топологии равны, то нормы $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ называют *эквивалентными* (и пишут $\|\cdot\|' \sim \|\cdot\|''$).

Следствие 1.3. *Пусть $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ — нормы на векторном пространстве X.*

(i) $\|\cdot\|' \prec \|\cdot\|'' \iff$ *существует такое $C > 0$, что $\|x\|' \leqslant C\|x\|''$ для всех $x \in X$;*
(ii) $\|\cdot\|' \sim \|\cdot\|'' \iff$ *существуют такие $c, C > 0$, что $c\|x\|'' \leqslant \|x\|' \leqslant C\|x\|''$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Рассмотрим линейный оператор $I\colon (X, \|\cdot\|'') \to (X, \|\cdot\|')$, $I(x) = x$. Очевидно, $\|\cdot\|' \prec \|\cdot\|''$ тогда и только тогда, когда он непрерывен. Это, в силу теоремы 1.2, эквивалентно ограниченности оператора I, т.е. существованию константы $C > 0$ со свойством, указанным в (i). Это доказывает (i), а (ii) очевидным образом следует из (i). $\square$

Обратите внимание, что из задачи 1.5 (см. листок 1) следует, что нормы $\|\cdot\|_p$ на $\mathbb{K}^n$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, см. примеры 1.2–1.4) эквивалентны друг другу. На самом деле верно следующее более общее утверждение.

Предложение 1.4. *На конечномерном векторном пространстве любые две нормы эквивалентны друг другу.*

Доказательство. Пусть $\|\cdot\|$ — какая-то норма на $\mathbb{K}^n$, а $\|\cdot\|_2$ — обычная евклидова норма (см. пример 1.4). Докажем, что они эквивалентны. Рассмотрим стандартный базис $e_1, \ldots, e_n$ в $\mathbb{K}^n$, где $e_i = (\ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (единица на i-м месте). Для любого $x \in \mathbb{K}^n$ по неравенству Коши-Буняковского[1] имеем

$$\|x\| = \Big\|\sum_i x_i e_i\Big\| \leqslant \sum_i |x_i| \|e_i\| \leqslant C\|x\|_2,$$

где $C = (\sum_i \|e_i\|^2)^{1/2}$. Следовательно, $\|\cdot\| \prec \|\cdot\|_2$.

Заметим теперь, что функция $f(x) = \|x\|$ непрерывна на $\mathbb{K}_2^n$. Это следует из неравенства

$$|f(x) - f(y)| = \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\| \leqslant C\|x - y\|_2.$$

Пусть $S = \mathbb{S}_{\mathbb{K}_2^n}$ — единичная сфера в $\mathbb{K}_2^n$ с центром в нуле. Поскольку она компактна, существует $\min_{x \in S} f(x) = a$. Ясно, что $a > 0$ (так как f — норма). Для любого ненулевого $x \in \mathbb{K}^n$ положим $y = x/\|x\|_2$. Поскольку $y \in S$, мы получаем неравенство $\|y\| \geqslant a$, т.е. $\|x\| \geqslant a\|x\|_2$. Следовательно, $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_2$. $\square$

Отметим, что для бесконечномерных векторных пространств утверждение, аналогичное предложению 1.4, неверно; примеры см. в листке 1.

Разобравшись со сравнением норм, вернемся к линейным операторам. Если X и Y — нормированные пространства, то множество всех ограниченных линейных операторов из X в Y обозначается через $\mathscr{B}(X, Y)$. Если $Y = X$, то вместо $\mathscr{B}(X, X)$ пишут обычно $\mathscr{B}(X)$. Наша ближайшая цель — показать, что $\mathscr{B}(X, Y)$ является нормированным пространством.

Определение 1.5. *Нормой* ограниченного линейного оператора $T\colon X \to Y$ называется число

$$\|T\| = \inf\big\{C \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant C\|x\| \quad \forall\, x \in X\big\}.$$

Замечание 1.3. Обратите внимание, что множество, от которого берется inf в этом определении, представляет собой замкнутый луч на прямой. Следовательно, само число $\|T\|$ также принадлежит этому множеству, так что

$$\|Tx\| \leqslant \|T\| \|x\| \quad \text{для всех } x \in X. \tag{1.1}$$

[1] Так называется неравенство Гёльдера при $p = q = 2$, см. задачу 1.3 из листка 1.

Кроме того, легко проверить (проверьте), что при $X \neq 0$

$$
\begin{aligned}
\|T\| &= \inf\bigl\{C \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant C\|x\| \quad \forall\, x \in X \setminus \{0\}\bigr\} = \\
&= \inf\left\{C \geqslant 0 : C \geqslant \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \quad \forall\, x \in X \setminus \{0\}\right\} = \\
&= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\|.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Первое и второе из этих равенств очевидны, третье следует из определения точной верхней грани, а четвертое и пятое доказываются с помощью приема нормировки. Если положить по определению $\sup \varnothing = 0$, то равенства (1.2) будут верны и для $X = 0$.

Подводя итог этим рассуждениям, можно (несколько нестрого) сказать, что норма оператора — это максимальное число раз, в которое он может растягивать векторы.

Предложение 1.5. *Пусть X, Y, Z — нормированные пространства.*

(i) *Если $S, T \in \mathscr{B}(X,Y)$, то $S + T \in \mathscr{B}(X,Y)$ и $\|S + T\| \leqslant \|S\| + \|T\|$.*
(ii) *Если $S \in \mathscr{B}(X,Y)$ и $\lambda \in \mathbb{K}$, то $\lambda S \in \mathscr{B}(X,Y)$ и $\|\lambda S\| = |\lambda|\|S\|$.*
(iii) *Если $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ и $S \in \mathscr{B}(Y,Z)$, то $ST \in \mathscr{B}(X,Z)$ и $\|ST\| \leqslant \|S\|\|T\|$.*

Доказательство. (i) Для каждого $x \in X$ с учетом (1.1) имеем

$$
\|(S+T)(x)\| = \|Sx + Tx\| \leqslant \|Sx\| + \|Tx\| \leqslant (\|S\| + \|T\|)\|x\|.
$$

Дальше ясно.

(ii) С учетом (1.2) получаем равенства

$$
\|\lambda S\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|\lambda Sx\| = |\lambda| \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Sx\| = |\lambda|\|S\|.
$$

(iii) Для каждого $x \in X$ с учетом (1.1) имеем

$$
\|STx\| \leqslant \|S\|\|Tx\| \leqslant \|S\|\|T\|\|x\|.
$$

Дальше ясно. □

Следствие 1.6. *$\mathscr{B}(X,Y)$ — нормированное пространство.*