Для получения максимальной оценки в 10 баллов достаточно полностью решить любые 5 задач. В случае решения бóльшего количества задач дополнительные баллы также будут учтены.

На экзамене разрешается пользоваться любыми своими записями. Не разрешается общаться, пользоваться книгами, интернетом и пр.

В решениях можно ссылаться на утверждения, доказанные в лекциях, и на сданные Вами задачи из листков.

1. Пусть X — векторное пространство всех числовых последовательностей $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, для каждого $r > 0$ удовлетворяющих условию $\sum_n |x_n| n^r < \infty$. Введем на X топологию, порожденную семейством полунорм $\{\|\cdot\|_r : r > 0\}$, где $\|x\|_r = \sum_n |x_n| n^r$.

1) Метризуемо ли X?
2) Нормируемо ли X?
3) Для каждого $r > 0$ и $x \in X$ положим $\|x\|_r^\infty = \sup_n |x_n| n^r$. Совпадает ли топология, порожденная семейством полунорм $\{\|\cdot\|_r^\infty : r > 0\}$, с исходной?

2. Для $a \in \mathbb{R}$ рассмотрим оператор $T_a \colon C_0(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$,

$$(T_a f)(x) = f(x-a).$$

Исследуйте семейство T_a на сходимость при $a \to 0$ 1) по операторной норме; 2) в сильной операторной топологии.

3. Пусть S и T — ограниченные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H, причем $ST = TS$. Рассмотрим гильбертово пространство $H^2 = H \oplus H$ со скалярным произведением $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle$, и определим оператор R в H^2 формулой $R(x, y) = (Sy, Tx)$. Докажите, что $r(R) = \sqrt{\|ST\|}$ (где r — спектральный радиус).

4. Верно ли, что всякое секвенциально слабо замкнутое подмножество гильбертова пространства слабо замкнуто?

5. Пусть T — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, и пусть E — его спектральная мера. Предположим, что на $\mathbb{R}$ существует такая положительная регулярная борелевская мера μ, что для каждого борелевского множества $B \subseteq \mathbb{R}$ условия $E(B) = 0$ и $\mu(B) = 0$ эквивалентны.
1) Докажите, что для любой ограниченной борелевской функции $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ спектр оператора $f(T)$ совпадает с множеством существеных значений f относительно μ.
2) Найдите меру μ в случае, когда T — это оператор умножения на функцию $\varphi(x) = x + |x|$ в пространстве $L^2[-1, 1]$.

6. Найдите s-числа и разложение Шмидта для оператора $V \colon L^2[0,1] \to L^2[0,1]$,

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

Указание. Если T — компактный оператор и $T^*T = \sum_n \lambda_n \langle \cdot\,, e_n \rangle e_n$ — разложение Гильберта–Шмидта оператора T^*T, то $T = \sum_n s_n \langle \cdot\,, e_n \rangle f_n$, где $s_n = \sqrt{\lambda_n}$ и $f_n = s_n^{-1} T e_n$.