Для получения максимальной оценки в 10 баллов достаточно полностью решить любые 5 задач. В случае решения бо́льшего количества задач дополнительные баллы также будут учтены.

На экзамене разрешается пользоваться любыми своими записями. Не разрешается общаться и пользоваться книгами, интернетом и т.п.

В решениях можно ссылаться на утверждения, доказанные в лекциях, и на сданные Вами задачи из листков.

Вариант 1

1. Рассмотрим отображение

$$[0,1] \to M[0,1], \quad x \mapsto \delta_x,$$

где δ_x — мера Дирака, сосредоточенная в x (т.е. равная единице на любом множестве, содержащем x, и нулю на остальных). Является ли это отображение непрерывным, если снабдить $M[0,1]$ **1)** слабой* топологией; **2)** слабой топологией?

2. Пространство S состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций f на $\mathbb{R}$, для каждых $k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{k,\ell} = \int_{\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|(1+|x|)^{\ell} dx < \infty.$$

Для каждых $k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ введем полунорму $\|\cdot\|_{k,\ell}^{\infty}$ на S формулой

$$\|f\|_{k,\ell}^{\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|(1+|x|)^{\ell}.$$

1) Мажорирует ли семейство полунорм $\{\|\cdot\|_{k,\ell} : k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$ семейство $\{\|\cdot\|_{k,\ell}^{\infty} : k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$?
2) Мажорирует ли семейство полунорм $\{\|\cdot\|_{k,\ell}^{\infty} : k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$ семейство $\{\|\cdot\|_{k,\ell} : k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$?

3. Пусть T — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, и пусть E — его спектральная мера. Докажите, что T фредгольмов тогда и только тогда, когда для некоторой окрестности нуля $U \subset \mathbb{R}$ проектор $E(U)$ имеет конечномерный образ.

4. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ на топологическом пространстве X называется *полунепрерывной сверху* (соответственно, *снизу*), если множество $f^{-1}(-\infty, c)$ (соответственно, $f^{-1}(c, +\infty)$) открыто в X для каждого $c \in \mathbb{R}$.

Пусть H — гильбертово пространство. Снабдим пространство ограниченных операторов $\mathscr{B}(H)$ слабой операторной топологией. Зафиксируем $x \in H \setminus \{0\}$. Является ли функция $T \mapsto \|Tx\|$ на $\mathscr{B}(H)$ **1)** полунепрерывной сверху? **2)** полунепрерывной снизу?

5. Оператор $T\colon L^2[-\pi,\pi] \to L^2[-\pi,\pi]$ действует по формуле

$$(Tf)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(x-y)} f(y)}{2 - e^{i(x-y)}}\, dy.$$

Пусть $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, равная 0 вне отрезка $[\pi/4, 3\pi/4]$, равная 1 в точке $\pi/2$ и линейная на отрезках $[\pi/4, \pi/2]$ и $[\pi/2, 3\pi/4]$. Докажите, что оператор $\varphi(T)$ тоже является интегральным оператором, т.е. задается формулой

$$(\varphi(T)f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K(x,y) f(y)\, dy,$$

и найдите функцию K в явном виде.

6. Пусть T — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве.
1) Докажите, что если $\sigma(T) \subseteq \{0,1\}$, то T — проектор.
2) Верно ли предыдущее утверждение, если T несамосопряжен?

Для получения максимальной оценки в 10 баллов достаточно полностью решить любые 5 задач. В случае решения бóльшего количества задач дополнительные баллы также будут учтены.

На экзамене разрешается пользоваться любыми своими записями. Не разрешается общаться и пользоваться книгами, интернетом и т.п.

В решениях можно ссылаться на утверждения, доказанные в лекциях, и на сданные Вами задачи из листков.

Вариант 2

1. Пусть (f_n) — последовательность функций в $L^p[0,1]$, такая, что $\|f_n\| \leqslant 1$ для всех n, и для каждого $t \in [0,1]$ существует не более одного $n \in \mathbb{N}$, для которого $f_n(t) \neq 0$. Следует ли отсюда, что (f_n) слабо сходится к нулю, если **1)** $1 < p < \infty$; **2)** $p = 1$?

2. Пространство L состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций f на $\mathbb{R}$, для каждых $k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{k,\ell} = \int_{\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| \big(\ln(1+|x|)\big)^{\ell} dx < \infty.$$

Для каждых $k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ введем полунорму $\|\cdot\|_{k,\ell}^{\infty}$ на L формулой

$$\|f\|_{k,\ell}^{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| \big(\ln(1+|x|)\big)^{\ell}.$$

1) Мажорирует ли семейство полунорм $\{\|\cdot\|_{k,\ell} : k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$ семейство $\{\|\cdot\|_{k,\ell}^{\infty} : k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$?
2) Мажорирует ли семейство полунорм $\{\|\cdot\|_{k,\ell}^{\infty} : k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$ семейство $\{\|\cdot\|_{k,\ell} : k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$?

3. Пусть T — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, и пусть E — его спектральная мера. Докажите, что T компактен тогда и только тогда, когда $E(\mathbb{R} \setminus K) = 0$ для некоторого не более чем счетного компакта $K \subset \mathbb{R}$, каждая ненулевая точка λ которого изолирована в K и такова, что проектор $E(\{\lambda\})$ имеет конечномерный образ.

4. Функция $f \colon X \to \mathbb{R}$ на топологическом пространстве X называется *полунепрерывной сверху* (соответственно, *снизу*), если множество $f^{-1}(-\infty, c)$ (соответственно, $f^{-1}(c, +\infty)$) открыто в X для каждого $c \in \mathbb{R}$.

Пусть H — гильбертово пространство. Снабдим пространство ограниченных операторов $\mathscr{B}(H)$ сильной операторной топологией. Является ли операторная норма на $\mathscr{B}(H)$ **1)** полунепрерывной сверху? **2)** полунепрерывной снизу?

5. Оператор $T \colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ действует по формуле

$$(Tx)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_{n-k}}{2^{|k|}}.$$

Пусть $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — характеристическая функция (индикатор) отрезка $[3/5, 3]$. Докажите, что оператор $\varphi(T)$ действует по формуле

$$\big(\varphi(T)x\big)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k x_{n-k},$$

и найдите числа c_k в явном виде.

6. Пусть T — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве.
1) Докажите, что любая изолированная точка спектра T является его собственным значением.
2) Верно ли предыдущее утверждение, если T несамосопряжен?