Для получения максимальной оценки в 10 баллов достаточно полностью решить любые 5 задач. В случае решения бо́льшего количества задач дополнительные баллы также будут учтены.

На экзамене разрешается пользоваться любыми своими записями. Не разрешается общаться и пользоваться книгами, интернетом и т.п.

В решениях можно ссылаться на утверждения, доказанные в лекциях, и на сданные Вами задачи из листков.

1. Линейный функционал $F \in C[-\pi/6, \pi]^*$ задан формулой

$$F(f) = \int\limits_{-\pi/6}^{0} \cos x f(x)\, dx - \int\limits_{0}^{\pi/2} \sin x f(x)\, dx + 2f(0) - \frac{1}{2} f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(\pi).$$

Найдите функцию распределения меры, соответствующей этому функционалу, постройте ее график и вычислите ее вариацию.

2. Линейный оператор $T\colon C[0,\pi] \to C[0,\pi]$ действует по формуле

$$(Tf)(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{x^2}{\pi}\right) + \int\limits_0^{\pi} f(y) \sin^2\bigl(2(x-y)\bigr)\, dy \qquad (f \in C[0,\pi],\ x \in [0,\pi]).$$

Отождествим стандартным образом пространство $(C[0,\pi])^*$ с $M[0,\pi]$ (так что сопряженный оператор T^* будет действовать в пространстве $M[0,\pi]$). Обозначим через μ меру Лебега. Найдите **1)** $(T^*\mu)([0,\pi/2))$; **2)** $(T^*\mu)([\pi/2,\pi])$.

3. Пусть X и Y — банаховы пространства.
1) Докажите, что множество сюръективных ограниченных линейных операторов из X в Y открыто в $\mathscr{B}(X,Y)$.
2) Верно ли предыдущее утверждение для неполных нормированных пространств?

4. Для каждого $t \in [0,1]$ обозначим через δ_t борелевскую меру на $[0,1]$, заданную формулой

$$\delta_t(B) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in B, \\ 0, & \text{если } t \notin B. \end{cases}$$

Рассмотрим линейный оператор $T\colon \ell^1 \to M[0,1]$, $(x_n) \mapsto \sum_n x_n \delta_{1/n}$. Отождествим стандартным образом ℓ^1 с c_0^*, а $M[0,1]$ — с $C[0,1]^*$. Существует ли такой ограниченный линейный оператор $S\colon C[0,1] \to c_0$, что $T = S^*$?

5. Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — неэквивалентные нормы на векторном пространстве X. Докажите, что сопряженные пространства $(X, \|\cdot\|_1)^*$ и $(X, \|\cdot\|_2)^*$ различны как подмножества в пространстве всех линейных функционалов на X.

6. Пусть $\|\cdot\|$ — норма на пространстве $L^1[0,1]$, превращающая $L^1[0,1]$ в банахово пространство и такая, что из сходимости последовательности (f_n) к элементу $f \in L^1[0,1]$ по норме $\|\cdot\|$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^x f_n(t)\, dt = \int\limits_0^x f(t)\, dt \quad \text{для всех } x \in [0,1].$$

Докажите, что норма $\|\cdot\|$ эквивалентна стандартной норме на $L^1[0,1]$.