Для получения максимальной оценки в 10 баллов достаточно полностью решить любые 5 задач. В случае решения бо́льшего количества задач дополнительные баллы также будут учтены.

На экзамене разрешается пользоваться любыми своими записями. Не разрешается общаться и пользоваться книгами, интернетом и т.п.

В решениях можно ссылаться на утверждения, доказанные в лекциях, и на сданные Вами задачи из листков. В задаче 4, если понадобится, можно пользоваться полнотой пространства $C^1[0,1]$.

В задаче 1 ответ необходимо полностью обосновать!

Вариант 1

1. Функция φ на отрезке $[0,2]$ задана формулой

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x=0,\ x=2, \\ 1-x & \text{при } 0<x<1, \\ x^2 & \text{при } 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

Обозначим через μ_φ меру Лебега–Стилтьеса на $[0,2]$, построенную исходя из функции φ, и рассмотрим функционал

$$F \in C[0,2]^*, \quad F(f) = \int_0^2 f(x)\, d\mu_\varphi(x).$$

1) Вычислите $\|F\|$. **2)** Для произвольной $f \in C[0,2]$ выразите $F(f)$ через значения функции f и через интегралы каких-либо функций по обычной мере Лебега.

2. Линейный оператор $T\colon L^2[-1,1] \to L^2[-1,1]$ действует по формуле

$$(Tf)(x) = \sqrt{|2x|} f(x^2) \qquad (f \in L^2[-1,1],\ x \in [-1,1]).$$

Отождествим стандартным образом пространство $(L^2[-1,1])^*$ с $L^2[-1,1]$ (так что сопряженный оператор T^* тоже будет действовать в пространстве $L^2[-1,1]$). Найдите функцию T^*f для **1)** $f(x) = \sin x$; **2)** $f(x) = \cos x$.

3. Пусть X — банахово пространство и $X_0 \subset X$ — замкнутое векторное подпространство коразмерности 1.

1) Докажите, что если X рефлексивно, то для каждого $x \in X$ существует элемент в X_0, ближайший к x.

2) Верно ли предыдущее утверждение, если X нерефлексивно?

4. Пусть X — банахово пространство и $T\colon X \to C^1[0,1]$ — линейный оператор. Предположим, что для всех $t \in [0,1]$ линейный функционал F_t на X, заданный формулой $F_t(x) = (Tx)(t)$, ограничен. Докажите, что тогда и T ограничен.

5. Пусть (f_n) — последовательность в $C[0,1]$. Докажите эквивалентность следующих утверждений:

(i) $\sup_n \int_0^1 |f_n(t)|\, dt < \infty$;

(ii) для любой равномерно стремящейся к нулю последовательности (g_n) в $C[0,1]$ выполнено $\lim_n \int_0^1 f_n(t) g_n(t)\, dt = 0$.

6. Существует ли топологический изоморфизм между $L^1[0,1]$ и каким-либо подпространством пространства c_0?

Для получения максимальной оценки в 10 баллов достаточно полностью решить любые 5 задач. В случае решения бóльшего количества задач дополнительные баллы также будут учтены.

На экзамене разрешается пользоваться любыми своими записями. Не разрешается общаться и пользоваться книгами, интернетом и т.п.

В решениях можно ссылаться на утверждения, доказанные в лекциях, и на сданные Вами задачи из листков.

В задаче 1 ответ необходимо полностью обосновать!

Вариант 2

1. Функция φ на отрезке $[-1, \pi/3]$ задана формулой

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ x^2 & \text{при } -1 < x < 0, \\ \cos x & \text{при } 0 \leqslant x < \pi/3, \\ 1 & \text{при } x = \pi/3. \end{cases}$$

Обозначим через μ_φ меру Лебега–Стилтьеса на $[-1, \pi/3]$, построенную исходя из функции φ, и рассмотрим функционал

$$F \in C[-1, \pi/3]^*, \quad F(f) = \int_{-1}^{\pi/3} f(x)\, d\mu_\varphi(x).$$

1) Вычислите $\|F\|$. **2)** Для произвольной $f \in C[-1, \pi/3]$ выразите $F(f)$ через значения функции f и через интегралы каких-либо функций по обычной мере Лебега.

2. Линейный оператор $T\colon C[0, 2\pi] \to C[0, 2\pi]$ действует по формуле

$$(Tf)(x) = f(0) + \sin x \cdot f(x) + \int_0^{2\pi} f(y) \cos^2(x - y)\, dy \qquad (f \in C[0, 2\pi],\ x \in [0, 2\pi]).$$

Отождествим стандартным образом пространство $(C[0, 2\pi])^*$ с $M[0, 2\pi]$ (так что сопряженный оператор T^* будет действовать в пространстве $M[0, 2\pi]$). Обозначим через μ меру Лебега. Найдите **1)** $(T^*\mu)([0, 2\pi])$; **2)** $(T^*\mu)([\pi, 2\pi])$.

3. Пусть X, Y — банаховы пространства и $T\colon X \to Y^*$ — инъективный ограниченный линейный оператор. Отождествим Y с его каноническим образом в Y^{**}, и предположим, что оператор $T^*|_Y\colon Y \to X^*$ изометричен.
1) Докажите, что если X рефлексивно, то T — изометрический изоморфизм.
2) Верно ли предыдущее утверждение, если X нерефлексивно?

4. Пусть X — векторное подпространство в $L^1[0, 1]$, являющееся банаховым относительно некоторой нормы. Для каждого $t \in [0, 1]$ определим функционал I_t на X формулой $I_t(f) = \int_0^t f(s)\, ds$. Положим $A = \{t \in [0, 1] : I_t \text{ непрерывен}\}$. Докажите, что $\sup_{t \in A} \|I_t\| < \infty$.

5. Пусть X — банахово пространство и $T\colon X \to L^1[0, 1]$ — ограниченный линейный оператор. Предположим, что существует такое $C > 0$, что для каждой ступенчатой функции $f \in L^1[0, 1]$ найдется $x \in X$, удовлетворяющий условиям $T(x) = f$ и $\|x\| \leqslant C\|f\|_1$. Докажите, что T сюръективен.

6. Существует ли топологический изоморфизм между $C[0, 1]$ и каким-либо факторпространством пространства c_0?