СИНОПСИС-2

По математическому анализу написано много хороших учебников на любой вкус. Поэтому здесь я позволю себе ограничиться лишь кратким перечислением основных определений и фактов, прозвучавших на лекциях. Если остаются вопросы — спрашивайте, обращайтесь к литературе, а лучше всего попробуйте придумать недостающее рассуждение сами. Исправления и дополнения приветствуются. Удачи!

Документ находится по адресу **http://vyshka.math.ru/pspdf/1112/calculus-2/synopsis2.pdf** и периодически обновляется. Разрешается копирование и распространение в неискажённом виде с любыми целями, кроме присвоения авторских прав.

Начало (1 курс) хранится по адресу **http://vyshka.math.ru/pspdf/1011/calculus-1/synopsis.pdf**.

Метрические пространства

Определение 1. *Метрическим пространством* называется множество M с *метрикой* — отображением $d : M \times M \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, удовлетворяющим

1) $d(x, y) = 0$ только при $x = y$;
2) $d(x, y) = d(y, x)$;
3) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Пример. Метрическими пространствами являются $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$.

Пример. Для любого множества X на множествае ограниченных функций $X \to \mathbb{R}$ можно задать метрику $d(f, g) = \sup\limits_{x \in X} |f(x) - g(x)|$.

Пример. Всякое подмножество метрического пространства само является метрическим пространством.

Определение 2. Метрическое пространство называется *ограниченным*, если функция $d(x, y)$ — ограничена. Функция $f : X \to M$, где M — метрическое пространство, называется *ограниченной*, если её образ ограничен.

Определение 3. Для множества X и метрического пространства M определим метрическое пространство $B(X, M)$, составленное ограниченными функциями $X \to M$ с метрикой $d(f, g) = \sup\limits_{x \in X} d(f(x), g(x))$.

Определение 4. Последовательность a_i элементов метрического пространства M сходится к $A \in M$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \ d(a_n, A) < \varepsilon$.

Определение 5. Отображение метрических пространств $M \to N$ называется *непрерывным по Гейне* в точке $x \in M$, если образ всякой сходящейся к x последовательности сходится в N.

Определение 6. Отображение метрических пространств $f : M \to N$ называется *непрерывным по Коши* в точке $x \in M$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y : d(x, y) < \delta\ \ d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Предложение 1 *Определения Гейне и Коши эквивалентны.*

Определение 7. Будем говорить, что отображение метрических пространств $f : M \setminus x \to N$ имеет *предел* $A \in N$ в точке $x \in M$, если, будучи доопределённым посредством $f(x) = A$, оно станет непрерывным в x.

Определение 8. Отображение метрических пространств $M \to N$ называется *непрерывным*, если оно непрерывно в любой точке.

Определение 9. Подмножество метрического пространства $U \subset M$ называется *открытым*, если для каждой точки $x \in U$ найдётся $\varepsilon > 0$, для которого шар $B(x, \varepsilon) = \{y | d(x, y) < \varepsilon\}$ содержится в U.

Предложение 2 *Отображение метрических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества открыт.*

Определение 10. Последовательность a_i элементов M называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, n > N\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Предложение 3 *Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.*

Определение 11. Метрическое пространство называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность в нём сходится.

Пример. Замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ являются полными метрическими пространствами.

Предложение 4 *Пространство $B(X, M)$ является полным тогда и только тогда, когда M полное.*

Теорема 1 (о пополнении) *Всякое метрическое пространство является подмножеством полного метрического пространства.*

Равномерная сходимость

Определение 12. Пусть X — множество, M — метрическое пространство. Последовательность функций $f_i : X \to M$ называется *равномерно сходящейся* к функции $f : X \to M$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N,\ x \in X\ \ d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Теорема 2 *Предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций на метрическом пространстве — непрерывная функция.*

Следствие 1 *Пусть f_i — последовательность функций, равномерно сходящихся к f. Тогда если $\lim\limits_{x\to A} f_n$ существует для всех n, то определены и равны друг другу следующие величины*

$$\lim_{x\to A} f = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to A} f_n.$$

Следствие 2 *Пусть X — произвольное метрическое пространство, M — полное метрическое пространство. Тогда подпространство непрерывных функций $C(X, M) \subset B(X, M)$ является полным.*

Теорема 3 *Пусть $f_i : D \to \mathbb{R}$ — равномерно сходящаяся к f последовательность непрерывных функций, интегрируемых по Риману на $D \subset \mathbb{R}^k$. Тогда f интегрируема по Риману на D и*

$$\int_D f\, dx_1 \dots dx_k = \lim_{n\to\infty} \int_D f_n dx_1 \dots dx_k$$

Теорема 4 *Пусть $f_i : D \to \mathbb{R}$ — последовательность функций на связном промежутке $D \subset \mathbb{R}$ с непрерывными производными. Предположим, что последовательность f_i' равномерно сходится к некоторой функции, а последовательность f_i сходится хотя бы в одной точке. Тогда последовательность f_i сходится к дифференцируемой функции f, причём для всех $x \in D$ выполнено $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.*

Следствие 3 *Пусть $D \subset \mathbb{R}$. Тогда пространство $C^k(D, \mathbb{R})$, состоящее из функций с непрерывной k-той производной, с метрикой*

$$d(f, g) = \sum_{n=0}^{k} \sup_{x\in D} |f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)|$$

полно.

Следствие 4 *Пусть $f_i : D \to \mathbb{R}$ — сходящаяся к f последовательность функций на подмножестве $D \subset \mathbb{R}^n$ с непрерывными частными производными. Предположим, что последовательности частных производных f_i равномерно сходятся. Тогда f — дифференцируема, и $df = \lim\limits_{n\to\infty} df_n$.*

Компактность метрических пространств

Определение 13. Метрическое пространство M называется *компактным по Гейне*, если из всякой последовательности элементов M можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.
Определение 14. Метрическое пространство M называется *компактным по Коши*, если из всякого открытого покрытия M можно выбрать конечное подпокрытие.

Предложение 5 *Всякое компактное по Гейне/Коши метрическое пространство полно.*

Определение 15. Метрическое пространство M называется *вполне ограниченным*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует конечный набор шаров радиуса ε, покрывающий M.

Предложение 6 *Вполне ограниченное метрическое пространство ограничено.*

Теорема 5 *Определения компактности по Гейне и Коши равносильны. При этом пространство компактно тогда и только тогда, когда оно полно и вполне ограничено.*

Теорема 6 (Арцел) *Подмножество $C([a,b],\mathbb{R})$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда входящие в него функции* ограничены в совокупности*:*

$$\exists C\ \forall f \in C([a,b],\mathbb{R})\ \forall x \in [a,b]\ \ |f(x)| < C,$$

и равностепенно непрерывны*:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall f \in C([a,b],\mathbb{R})\ \forall x,y \in [a,b]:\ |x-y| < \delta\ \ |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

Определение 16. Векторное пространство над $\mathbb{R}$ с нормой $\|x\|$ называется *банаховым пространством*, если оно полно относительно метрики $d(a,b) = \|b-a\|$.
Пример. Банаховыми пространствами являются $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $B(X,\mathbb{R})$, $C(X,\mathbb{R})$, $C^k(D,\mathbb{R})$.

Лемма 1 (о почти перпендикуляре) *Пусть L — замкнутое собственное (отличное от M) подпространство банахового пространства M. Тогда для всякого $C < 1$ найдётся вектор $v \in M$, для которого $\|v\| = 1$ и $d(v,L) = \inf\limits_{x\in M} \|v-x\| > C$.*

Теорема 7 *Шар в банаховом пространстве компактен тогда и только тогда, когда пространство конечномерно.*

Ряды Фурье

Определение 17. *Тригонометрический полином/ряд* — полином/ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n>0} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \exp(inx).$$

Определение 18. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — интегрируемая по Риману функция, периодическая с периодом 2π. Определим *ряд Фурье* f как тригонометрический ряд, в котором

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\exp(-inx)dx, \qquad \text{что равносильно } a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,\ \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

Предложение 7 *Пусть $S_k = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{k} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = \sum\limits_{n=-k}^{k} c_n\exp(inx)$. Тогда для ряда Фурье f выполняется*

$$S_k(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_k(x-t)dt, \quad \text{где } D_n(y) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}.$$

Лемма 2 (Риман) *Пусть f — интегрируемая по Риману функция на $[a,b]$. Тогда*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\exp(i\lambda x)dx = 0.$$

Теорема 8 *Пусть f — периодическая интегрируемая по Риману функция с непрерывной производной в окрестности x. Тогда последовательность частичных сумм ряда Фурье f сходится в точке x к $f(x)$.*

Теорема 9 *Пусть f и g — периодические интегрируемые по Риману функции, совпадающие в некоторой окрестности точки x. Тогда последовательности частичных сумм рядов Фурье f и g сходятся/расходятся в точке x одновременно, а если сходятся, то к одинаковым значениям.*

Теорема 10 (Фейер) *Положим $\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}(S_0(x) + \dots + S_n(x))$.*

(i) Если периодическая интегрируемая по Риману функция f непрерывна в точке x, то для её ряда Фурье последовательность $\sigma_n(x)$ сходится к $f(x)$.

(ii) Если периодическая интегрируемая по Риману функция f равномерно непрерывна на множестве D, то для её ряда Фурье последовательность $\sigma_n(x)$ равномерно сходится к f на D.

Следствие 5 *Всякая непрерывная периодическая функция равномерно приближается тригонометрическими многочленами.*

Следствие 6 (Вейерштрасс) *Всякая непрерывная функция на отрезке равномерно приближается обыкновенными многочленами.*

На ряды Фурье можно посмотреть и с другой стороны. Определим скалярное произведение на пространстве (кусочно-)непрерывных функций с периодом 2π посредством

$$(f,g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

Тогда функции $\sin(kx)$ и $\cos(kx)$ образуют ортогональный базис в этом пространстве, а частичная сумма S_n ряда Фурье f — ортогональная проекция f на подпространство, порождённое $\sin(kx)$ и $\cos(kx)$ при $k \leqslant n$.

Предложение 8 *Ряд Фурье непрерывной функции f сходится к ней* в среднем квадратичном*, то есть $\int_{-\pi}^{\pi}(S_n - f)^2 dx \to 0$ при $n \to \infty$.*

Предложение 9 *Пусть a_k, b_k — коэффициенты ряда Фурье интегрируемой функции f. Тогда*

$$\sum_{k\leqslant n} a_k^2 + b_k^2 \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx.$$

При этом, если ряд Фурье сходится к f в среднем квадратичном, то выполнено равенство Парсеваля*:*

$$\sum_{k} a_k^2 + b_k^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx.$$

Пример. Ряд $\sum \frac{sin(kx)}{\sqrt{k}}$ сходится при всех x (по признаку Дирихле), но не является ничьим рядом Фурье, так как равенство Парсеваля невозможно (сумма квадратов коэффициентов расходится).

Ближайшая задача — пополнить пространство непрерывных функций с такой нормой.

Интеграл Лебега

Для начала дополним определение меры Лебега двумя критериями.

Определение 19. Пусть X — ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$. Определим *верхнюю меру*

$$\mu^*(X) = \inf_{\substack{E_1, E_2, \dots \\ \cup E_i \supset X}} \sum \mathrm{vol}(E_i),$$

где E_i — элементарные множества, а сумма берётся по конечным и счётным наборам таких множеств.

Предложение 10 *Подмножество элементарного множества $X \subset D$ измеримо тогда и только тогда, когда $\mu^*(X) + \mu^*(D \setminus X) = \mathrm{vol}(D)$. При этом значение меры Лебега $\mu(X)$ совпадает с $\mu^*(X)$.*

Предложение 11 *Ограниченное множество X измеримо тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся открытое U и замкнутое F, для которых $U \supset X \supset F$ и $\mu(U) - \mu(F) < \varepsilon$.*

Определение 20. Функция $f : D \to \mathbb{R}$ *измерима*, если прообраз любого отрезка $[a,b] \subset \mathbb{R}$ измерим.

Предложение 12 *Пусть D — множество конечной меры. Тогда $f : D \to \mathbb{R}$ измерима тогда и только тогда, когда прообраз любого луча (a, ∞) измерим.*

Предложение 13 *Линейная комбинация и произведение измеримых функций — измеримая функция. Поточечный предел последовательности измеримых функций — измеримая функция.*

Теорема 11 (Егоров) *Пусть последовательность измеримых функций f_i сходится поточечно на ограниченном измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся измеримое подмножество $U \subset D$, на котором последовательность сходится равномерно, и при этом $\mu(U) > \mathrm{vol}(D) - \varepsilon$.*

Определение 21. Измеримая функция, принимающая счётное множество значений, называтся *ступенчатой.*

Предложение 14 *Всякую измеримую функцию можно равномерно приблизить ступенчатыми.*

Определение 22. Ступенчатая функция f на измеримом множестве D называется *интегрируемой*, если ряд

$$\sum_{x \in f(D)} x\mu(f^{-1}(x))$$

абсолютно сходится. Произвольная функция на D называется *интегрируемой по Лебегу*, если она равномерно приближается ступенчатыми.

Отметим, что интегрируемая функция измерима как предел измеримых функций.

Определение 23. *Интегралом Лебега* ступенчатой функции называется сумма ряда $x\mu(f^{-1}(x))$. Если функция f равномерно приближена ступенчатыми, то их интегралы образуют фундаментальную последовательность, предел которой называется *интегралом Лебега* f и обозначается $\int_D f d\mu$.

Предложение 15 *(i) Интегрируемые функции образуют векторное пространство, и интгерал является линейным функционалом на нём.*

(ii) Монотонность: если f и g интегрируемы и $f(x) \geqslant g(x)$ при всех x, то $\int_D f d\mu \geqslant \int_D g d\mu$.

(iii) σ-аддитивность: если $D = \cup D_n$ — объединение конечного или счётного набора измеримых множеств, и $\mu(D_n \cap D_m) = 0$ для $m \neq n$, то для всякой интегрируемой f выполнено $\int_D f d\mu = \sum_n \int_{D_n} f d\mu$.

Предложение 16 *Пусть f — измеримая функция, $\phi \geqslant 0$ — интегрируемая функция, и $|f| \leqslant \phi$. Тогда f интегрируема.*

Следствие 7 *Интегрируемость измеримой функции f равносильна интегрируемости $|f|$.*

Лемма 3 (Неравенство Чебышёва) *Для каждой интегрируемой неотрицательной функции $f \geqslant 0$ выполнено*

$$\mu\{x \in D \mid f(x) > C\} \leqslant \frac{1}{C} \int_D f d\mu.$$

Теорема 12 (Абсолютная непрерывность) *Пусть f — функция, интегрируемая на ограниченном измеримом множестве D. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для всякого измеримого $X \subset D$ с $\mu(X) < \delta$ выполнено $|\int_X f d\mu| < \varepsilon$.*

Теорема 13 (Лебег) *Пусть последовательность измеримых функций f_n сходится к f на ограниченном измеримом множестве D, и при этом существует интегрируемая функция ϕ, для которой $|f_n| \leqslant \phi$. Тогда последовательность $\int_D f_n d\mu$ сходится к $\int_D f d\mu$.*

Теорема 14 (Б.Леви) *Пусть $f_1 \leqslant f_2 \leqslant f_3 \leqslant \ldots$ — последовательность интегрируемых функций на ограниченном измеримом множестве D, при этом последовательность $\int_D f_n d\mu$ ограничена. Тогда последовательность f_n сходятся почти всюду (кроме множества меры ноль) к некоторой функции f, и $\int_D f_n d\mu$ сходится к $\int_D f d\mu$.*

Теорема 15 (Фату) *Если последовательность интегрируемых неотрицательных функций f_n, для которых $\int_D f_n d\mu \leqslant K$, сходится почти всюду к функции f, то f интегрируема и $\int_D f d\mu \leqslant K$.*

Определение 24. Определим пространство L_1 классов совпадающих почти всюду интегрируемых функций на D с нормой $\|f\| = \int_D |f| d\mu$.

Определение 25. Определим пространство L_2 классов совпадающих почти всюду функций с интегрируемым квадратом на D с нормой $\|f\| = \sqrt{\int_D f^2 d\mu}$.

Предложение 17 *Выражение $\int_D fg\, d\mu$ определено для всех $f, g \in L_2$ и определяет скалярное произведение на L_2.*

Теорема 16 *Пространства L_1 и L_2 полны.*

Теорема 17 *Подпространство непрерывных функций плотно в L_1 и в L_2.*

Следствие 8 *Сопоставление функции ряда Фурье устанавливает изоморфизм пространства L_2 на отрезке и пространства l_2 последовательностей с суммируемым квадратом.*

Многообразия

Попробуем совместить координатный и бескоординатный подход.

Определение 26. Подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *гладким многообразием размерности* m *в* $\mathbb{R}^n$, если для каждой точки $x \in M$ существует *карта* — открытое множество $U_x \subset \mathbb{R}^m$ и гладкое отображение $\phi_x : U_x \to M$ с невырожденным дифференциалом в каждой точке. Многообразие называется k-гладким, бесконечно гладким, и.т.д., если таковыми являются отображения ϕ_x.

Предложение 18 *В определении выше можно положить* $U_x = \mathbb{R}^m$.

Пример. Согласно теореме о неявной функции, нули отображения $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ с дифференциалом ранга k являются гладким многообразием.

Определение 27. *Многообразие размерности* m задаётся *атласом* — набором открытых множеств $U_i \subset \mathbb{R}^m$, $i \in I$ с выделенными подмножествами $U_{ij} \subset U_i$ (возможно, пустыми) и гомеоморфизмами $\phi_{ij} : U_{ij} \to U_{ji}$, удовлетворяющими $\phi_{ij} \circ \phi_{jk} = \phi_{ik}$ на области опеределения левой и правой части. Как топологическое поространство оно задаётся склейкой точек x с $\phi_{ij}(x)$. Многообразие называется k-гладким, бесконечно гладким, и.т.д., если таковыми являются отображения ϕ_{ij}.

Предложение 19 *Для многообразия в* $\mathbb{R}^n$ *можно взять* $I = M$, $\phi_{xy} = \phi_y^{-1} \circ \phi_x$.

Лемма 4 (Разбиение единицы) *Пусть* $U_1, \dots, U_n$ *— покрытие компактного многообразия* M *открытыми множествами. Тогда найдутся бесконечно гладкие функции* $f_1, \dots, f_n$, *для которых* $f_1 + \dots + f_n = 1$ *и* $f_i = 0$ *вне* U_i.

Теорема 18 (Уитни (слабая версия)) *Всякое компактное (как топологическое пространство) гладкое многообразие можно вложить в* $\mathbb{R}^n$.

Определение 28. Пусть M и N — гладкие многообразия, заданные картами U_i и V_j, $f : M \to N$ — отображение. Будем говорить, что отображение f является *гладким* (k-гладким, аналитическим, etc.), если таковым являются ограничения $f_{ij} : U_i \to V_j$.

Определение 29. *Касательное пространство* T_xM к многообразию $M \subset \mathbb{R}^n$ в точке $x \in M$ — образ $d\phi_x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Определение 30. *Касательное пространство* T_xM к многообразию M в точке $x \in M$ — класс эквивалентности гладких отображений $\pi : [-1, 1] \to M$ с $\pi(0) = x$, относительно $\pi_1 \sim \pi_2$, если в карте, содержащей x, расстояние между $\pi_1(t)$ и $\pi_2(t)$ принадлежит $o(t)$.

Предложение 20 *Два определения выше эквивалентны для многообразия в* $\mathbb{R}^n$, *отображение из класса* π *в* $\mathbb{R}^n$ *задаётся как* $d_0\pi(\mathbf{e})$, *где* $\mathbf{e}$ *— единичный вектор.*

Определение 31. Пусть $f : M \to N$ — гладкое отображение. Тогда его дифференциал $d_xf : T_xM \to T_{f(x)}N$ определяется на классах кривых, как переводящее представитель π в $f \circ \pi$.

Предложение 21 *Дифференциал определён корректно и является линейным отображением. Для многообразия в* $\mathbb{R}^n$ *в картах* $U_x \xrightarrow{\phi_x} M$ *и* $V_y \xrightarrow{\psi_y} N$ *он задаётся композицией* $d\psi_y \circ d(\psi_y^{-1} \circ f \circ \phi_x) \circ (d\phi_x)^{-1}$.

Одно из практических применений этого формализма — задача об условном экстремуме. Пусть заданы функции $f, F_1, \dots, F_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, задача — найти локальные экстремумы f на множестве решений системы уравнений $F_1 = \dots = F_k = 0$. Объединим функции F_i в отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

Предложение 22 *Пусть* $M = F^{-1}(0)$ *— множество решений. Тогда если ранг* d_xF *равен* k, *то* M *— многообразие, и* T_xM *— множество нулей* d_xF.

Предложение 23 *Пусть ранг* d_xF *равен* k. *Тогда если* x *— условный экстремум* f, *то ограничение* df *на* T_xM *равно нулю.*

Следствие 9 *Пусть ранг* d_xF *равен* k, x *— условный экстремум* f. *Тогда найдутся такие* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, *что* $d_x(f - \lambda_1F_1 - \dots - \lambda_kF_k) = 0$. *Функцию* $L = f - \lambda_1F_1 - \dots - \lambda_kF_k$ *называют* функцией Лагранжа.

Теорема 19 *Пусть в точке* x *выполнено* $d_xL = 0$ *для некоторых* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. *Рассмотрим ограничение* $d_x^{(2)}L$ *на* T_xM. *Тогда если эта билинейная форма положительно определена, то* x *— условный локальный минимум, если отрицательно определена, то максимум, если принимает значения различных знаков, то* x *не является экстремумом. Случай полуопределённой формы требует отдельного рассмотрения.*

Дифференциальные формы.

Вспомним определения из линейной алгебры.

Определение 32. Пусть V — векторное пространство. Определим векторное пространство $\otimes^k V^*$ как образованное функциями $\pi : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$, линейными по каждому из k аргументов. Также определим подпространство $\wedge^k V^* \subset \otimes^k V^*$, образованное кососимметричными функциями (меняющими знак при перестановке любых двух аргументов).

Определение 33. Пусть $\pi_1 \in \otimes^k V^*$, $\pi_2 \in \otimes^l V^*$. Определим элемент $\pi_1 \otimes \pi_2 \in \otimes^{k+l} V^*$ как функцию $\pi_1 \otimes \pi_2(v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_l) = \pi_1(v_1, \ldots, v_k)\pi_2(u_1, \ldots, u_l)$.

Пусть дополнительно $\pi_1 \in \wedge^k V^*$, $\pi_2 \in \wedge^l V^*$. Определим элемент $\pi_1 \wedge \pi_2 \in \wedge^{k+l} V^*$, полагая $\pi_1 \wedge \pi_2 = \frac{(k+l)!}{k!l!}\mathrm{Alt}(\pi_1 \otimes \pi_2)$.

Предложение 24 *Операции $\otimes$ и $\wedge$ определяют структуру ассоциативной алгебры на векторных пространствах $\bigoplus_k \otimes^k V^*$ и $\bigoplus_k \wedge^k V^*$ соответственно.*

Предложение 25 *Пусть размерность V равна d. Тогда размерность $\otimes^k V^*$ равна d^k, а размерность $\wedge^k V^*$ равна C_d^k (в частности, нулю при $k > d$). А отображение* альтернирования $\mathrm{Alt} : \otimes^k V^* \to \otimes^k V^*$, *определённое как*

$$\mathrm{Alt}(\pi)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{Sign}(\sigma)\pi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}),$$

является проектором на $\wedge^k V^*$.

Предложение 26 *Линейное отображение $\phi : U \to V$ задаёт линейное отображение $\phi^{*,k} : \otimes^k V^* \to \otimes^k U^*$ посредством $\phi^{*,k}(\pi)(u_1, \ldots, u_k) = \pi(\phi(u_1), \ldots, \phi(u_k))$. При этом $\phi^{*,k}$ переводит $\wedge^k V^*$ в $\wedge^k U^*$.*

Предложение 27 *Пусть V — векторное пространство размерности d, $A : V \to V$ — оператор. Тогда скаляр $A^{*,d}$ равен определителю A.*

Вернёмся к многообразиям.

Определение 34. Пусть M — гладкое многообразие. Тогда *дифференциальная k-форма ω* на M — отображение, сопоставляющее каждой точке $x \in M$ элемент $\omega_x \in \wedge^k (T_x M)^*$. Непрерывность, гладкость и аналитичность дифференциальной формы определяется в соответствующей карте, где $T_x M$ отождествлено с евклидовым пространством. Пространство гладких k-форм на M обозначается $\Omega^k(M)$.

Пример. Всякая функция является 0-формой.

Пример. Дифференциал функции является 1-формой.

Пример. Для многообразия M в $\mathbb{R}^n$ размерности m определена *форма объёма dS*, для которой $dS_x(v_1, \ldots, v_m)$ равен квадратному корню из определителя матрицы Грамма $((v_i, v_j))$.

Определение 35. Пусть ω — k-форма на M, а η — l-форма. Определим $k+l$-форму $\omega \wedge \eta$, полагая для $x \in M$ $(\omega \wedge \eta)_x = \omega_x \wedge \eta_x$

Предложение 28 *Всякая k-форма на подмножестве $\mathbb{R}^n$ имеет вид*

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} f_{i_1, \ldots, i_n} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Непрерывность, гладкость и аналитичность такой формы определяется по аналогичным свойствам функций $f_{i_1, \ldots, i_n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Определим операции на формах.

Определение 36. Пусть $\phi : M \to N$ — отображение многообразий, ω — k-форма на N. Тогда $\phi^*(\omega)$ — k-форма на M, для которой $\phi^*(\omega)_x(v_1, \ldots, v_k) = \omega_{\phi(x)}(d_x\phi(v_1), \ldots, d_x\phi(v_k))$.

Предложение 29 *Имеем $\phi^*(\omega \wedge \eta) = (\phi^*\omega) \wedge (\phi^*\eta)$.*

Определение 37. *Векторное поле ξ* на многообразии M — отображение, сопоставляющее каждой точке $x \in M$ элемент $\xi_x \in T_x M$. Непрерывность, гладкость и аналитичность векторного поля определяется в соответствующей карте.

Определение 38. Для векторного поля ξ определим *свёртку* $\iota_\xi : \Omega^{k+1}(M) \to \Omega^k(M)$, для которой $(\iota_\xi \omega)_x(v_1, \ldots, v_k) = \omega_x(\xi_x, v_1, \ldots, v_k)$.

Предложение 30 *Выражение $\iota_\xi \omega$ линейно по ξ и ω. Для k-формы ω и l-формы η выполняется тождество $\iota_\xi(\omega \wedge \eta) = \iota_\xi(\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \iota_\xi(\eta)$.*

Определение 39. Из курса дифференциальных уравнений известно, что для всякого векторного поля ξ на компактном многообразии M найдётся семейство диффеоморфизмов $\phi_t : M \to M$, $t \in U \subset \mathbb{R}$, для которых $\frac{d\phi}{dt}(x) = \xi_x$.

Для векторного поля ξ определим *производную Ли* $L_\xi : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$, переводящее форму ω в $\frac{d}{dt}\left(\phi_t^*\omega\right)\big|_{t=0}$.

Предложение 31 *Выражение $L_\xi\omega$ линейно по ω. Для k-формы ω и l-формы η выполняется тождество $L_\xi(\omega \wedge \eta) = L_\xi(\omega) \wedge \eta + \omega \wedge L_\xi(\eta)$.*

Теперь достаточно вычислить производную Ли для функций и 1-форм. Это легко сделать, заметив, что производная Ли функции совпадает с производной по направлению, и $d(\phi_t^* f) = d(f \circ \phi_t) = \phi_t^* df$, следовательно, $L_v df = d(L_v f)$, в частности, $L_\xi\omega$ линейно и по ξ.

Предложение 32 *В $\mathbb{R}^n$ имеем $L_{f\frac{\partial}{\partial x_i}} g = f\frac{\partial g}{\partial x_i}$, $L_{f\frac{\partial}{\partial x_i}} dx_j = \delta_{ij} df$.*

Предложение 33 *Существует и единственно семейство отображений $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$, $0 \leqslant k \leqslant \dim(M)$, для которых выполнено*

1) $d \circ d = 0$;

2) для функции $f \in \Omega^0(M)$ имеем $d(f) = df$;

3) для $\omega \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^l(M)$ имеем $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (d\eta)$.

Предложение 34 *Для гладкого отображения многообразий $\phi : N \to M$ и гладкой формы ω на M выполнено $\phi^*(d\omega) = d\left(\phi^*\omega\right)$.*

Теорема 20 (Формула Картана) *Для всякой формы ω и векторного поля ξ выполнено*

$$L_\xi\omega = \iota_\xi d\omega + d(\iota_\xi\omega).$$

Теорема 21 (Лемма Пуанкаре) *Для $M = \mathbb{R}^n$ образ отображения $d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)$ совпадает с ядром отображения $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$.*

Интегрирование на многообразиях.

Определение 40. Многообразие называется *ориентированным*, если для него задан атлас, в котором для функций перехода ϕ_{ij} выполнено $\det(d_x\phi_{ij}) > 0$. Два таких атласа назовём *эквивалентными*, если это же выполняется для перехода с карт одного атласа на другой. Многообразие называется *ориентируемым*, если у него существует такой атлас.

Предложение 35 *Для связного ориентируемого многообразия существуют ровно два класса эквивалентности атласов, при этом для функций перехода между любыми двумя картами неэквивалентных атласов выполняется* $\det(d_x\phi_{ij}) < 0$

Определение 41. Пусть M — ориентированное компактное многообразие размерности m, ω — m-форма на M. Определим интеграл ω по многообразию M следующим способом. Выберем из атласа M конечное покрытие $U_1, \dots U_n$, пусть $f_1, \dots, f_n$ — разбиение единицы, соответствующее этим множеством. Тогда форма $\phi_i^*(f_i\omega)$ примет вид $F_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$, где F_i равна нулю вне некоторого компактного множества D_i (можно считать его кубом). Положим

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{D_i} F_i d\mu,$$

где μ — мера Лебега на $\mathbb{R}^m$.

Предложение 36 *Интеграл не изменится, если взять другое разбиение единицы, а также если заменить атлас на эквивалентный.*

Определение 42. *Многообразие с краем* задаётся аналогично посредством подмножеств пространства $U_i \subset \mathbb{R}^m$ и полупространства $U_j' \subset H = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m | x_1 \leqslant 0\}$. И в этом случае можно считать $U_i = \mathbb{R}^m$, $U_j' = H$.

Предложение 37 *Образ границы H многообразия с краем M размерности m наследует структуру многообразия размерности $m-1$ такой же гладкости. Он называется* краем *M и обозначается ∂M. При этом ориентированный атлас M задаёт ориентированный атлас ∂M.*

Теорема 22 (Стокс) *Для $(m-1)$-формы ω на ориентированном многообразии M размерности m выполнено*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$