

Занятие и задание 9

Задача 1. Пусть $g(\tau, z) = e^{z\tau}e^{-e^\tau}$.

- а) Докажите, что для любого фиксированного z с $\operatorname{Re}(z) > 0$, функция $g(\tau, z)$ мажорируется функцией $e^{-\varepsilon|\tau|}$ для некоторого ε .
- б) Докажите, что для любого диска $D \subset \{z \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ существуют $C > 0$, $\varepsilon > 0$, для которых

$$|g(\tau, z)| < Ce^{-\varepsilon|\tau|} \quad \text{в } \mathbb{R} \times D.$$

Задача 2. Найдите

- а) значение $\Gamma(1)$,
- б) значение $\Gamma(n)$ при $n \in \mathbb{N}$.

Задача 3. Пусть $h_x(\tau) = g(\tau, x) = e^{\tau x}e^{-e^\tau}$.

- а) Докажите, что при любом $x > 0$, функция $h_x(\tau)$ — быстро убывающая.
- б) Докажите, что для любых вещественных $0 < A < B$ все производные по τ функции $h_x(\tau)$ равномерно ограничены по $x \in [A, B]$ при $\tau \in \mathbb{R}$.

Задача 4. Найдите $|\Gamma(i\varphi + \frac{1}{2})|$.

- Задача 5.** Докажите, что если f — голоморфная функция в выпуклой области U , симметричной относительно вещественной оси, принимающая вещественные значения на $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, то она сама симметрична в следующем смысле:

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}.$$

Задача 6. Найдите вычеты Γ -функции в точках $-n$, $n \in \mathbb{Z} \cup \{0\}$.

Задача 7. Опишите группу монодромии следующих функций:

- а) $\sqrt[3]{z}$,
- б) z^α для $\alpha \in \mathbb{Q}$,
- в) z^α для $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
- г) z^α для $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,
- д) $z^\alpha(z - 1)^\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Задача 8. Приведите пример неоднозначной аналитической функции, множество всех значений которой в одной точке

- а) плотно на окружности
- б*) плотно на всей плоскости \mathbb{C} .
- в) образуют решетку \mathbb{Z}^2 .