Занятие и задание 8

Задача 1. Найдите $\dfrac{(1+i)^{10}}{(1-i)^{10}}$.

Задача 2. Пусть $|\zeta| = 1$, $\zeta \neq \pm 1$. Докажите следующими методами, что $z = \dfrac{\zeta - 1}{\zeta + 1}$ — чисто мнимое число.

a) Убедитесь, что $\bar{z} = -z$.

b) Без вычисления, используя геометрию окружности.

Задача 3. Решите уравнения 1) $z^3 = 8$; 2) $z^3 = -8$; 3) $z^4 = -4$.

Задача 4. Найдите i^i.

Задача 5. Пусть $\alpha = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Выразите модуль и аргумент z^α через модуль и аргумент z.

Задача 6. Выразите $\sin z$ и $\cos z$ через гиперболические функции $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$.

Задача 7. Существует ли комплексное число z удовлетворяющее $\cos z = 100$?

Задача 8. Найдите вещественные части, мнимые части и модули $\cos(x+iy)$ и $\sin(x+iy)$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Задача 9. a) Докажите формулы при $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathbb{R}$:

$$\cos n\varphi = \cos^n \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi + \cdots,$$

$$\sin n\varphi = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \cdots.$$

b) Из пункта a) следует, что $\cos n\varphi$ является многочленом от $\cos \varphi$, положим $\cos n\varphi = T_n(\cos \varphi)$. Такой многочлен $T_n(x)$ называется *многочленом Чебышёва*. Докажите *ортогональность*:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)\, T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & (m \neq n), \\ \frac{\pi}{2}, & (m = n > 0), \\ \pi, & (m = n = 0). \end{cases}$$

Задача 10. a) Докажите, что $x = \log(y + \sqrt{y^2+1})$ — обратная функция к $y = \operatorname{sh} x$.

b) Выразите обратную тригонометрическую функцию $\arcsin x$ через логарифм.

c) Выразите обратную тригонометрическую функцию $\operatorname{arctg} x$ через логарифм.