

Занятие и задание 7

Задача 1. Используя таблицу преобразований Фурье и замены в интеграле, найдите преобразование Фурье следующих функций:

- a) $\chi_{[a,b]}$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- b) $xe^{-\frac{x^2}{2}}$,
- c) $(\sin(x)/x)^2$,
- d) $\frac{\cos(x)}{1+x^2}$,
- e) $x^2e^{-\frac{x^2}{2}}$,
- f) $P(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$, где $P(x)$ — многочлен.

Задача 2*. a*) Найдите преобразование Фурье функции e^{-ax^2} , где $a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(a) > 0$.

b*) Распространите полученный результат на случай $\operatorname{Re}(a) = 0$.

Задача 3*. Найдите преобразование Фурье следующих функций:

- a*) $\cos(x^2)$,
- b*) $\sin(x^2)$,
- c*) $\frac{e^{-|x|}}{\sqrt{|x|}}$,
- d*) $\operatorname{Sign}(x)\sqrt{|x|}e^{-|x|}$.

Задача 4. Докажите, что пространство быстро убывающих функций

- а) содержит ненулевой элемент,
- б) бесконечномерно.

Задача 5. Докажите эквивалентность двух определений свёртки.

Задача 6. а) Докажите, что пространство быстро убывающих функций образует *дифференциальную алгебру* — алгебру над \mathbb{R} относительно стандартных арифметических операций, замкнутую относительно дифференцирования.

- б) Замкнуто ли оно относительно свёртки?

Задача 7. Пусть f — ограниченная непрерывная (не обязательно финитная) функция на \mathbb{R} , Δ_n — δ -образная последовательность. Верно ли, что

- а) $f * \Delta_n \rightarrow f$?
- б) $f * \Delta_n \rightrightarrows f$ на всей прямой?
- в) $f * \Delta_n \rightrightarrows f$ на любом компакте?

Задача 8. Напишите в явном виде формулу решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Таблица преобразований Фурье

$f(x)$	$\chi_{[-1,1]}$	$e^{-x^2/2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$g(ax)$, $a \in \mathbb{R}$	$g(x+b)$	$e^{cx}g(x)$
$\tilde{f}(y)$	$\frac{2\sin(y)}{y}$	$\sqrt{2\pi}e^{-y^2/2}$	$\pi e^{- y }$	$\frac{1}{ a }\tilde{g}\left(\frac{y}{a}\right)$	$e^{iby}\tilde{g}(y)$	$\tilde{g}(y+ic)$