# Занятие и задание 6

**Задача 1.** Найдите прямое и обратное преобразование Фурье функции

a) $e^{-ax^2}$, $a > 0$.

b) $e^{-ax^2+bx+c}$, $a > 0$, $b$, $c \in \mathbb{R}$.

**Задача 2.** Используя интегралы в комплексной области и вычеты, найдите преобразование Фурье функций

a) $\frac{1}{1+x^2}$,

b) $\frac{x^{2012}}{1+x^2}$, (признана “задачей-шуткой”)

c) $\frac{1}{1+x^4}$,

$d^*$) $\frac{1}{(1+x^2)^2}$.

**Задача 3.** Пусть $f \in S$, $f(0) = \frac{1}{2\pi}$, $\widetilde{f} \geqslant 0$. Положим $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$. Докажите, что $\mathcal{F}(f_\lambda)$ образует $\delta$-образное семейство при $\lambda \to 0$.

**Задача 4.** С какой скоростью убывают коэффициенты Фурье функций

a) $f(x) = \frac{1}{2-\sin x}$,

b) $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}+e^{ix}}$?

Точнее, для каких $\lambda > 0$ существует $C$ такое, что $|f_k| < Ce^{-\lambda|k|}$?

**Задача 5.** Пусть $f$ – финитная непрерывная функция, положим $f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)dt$.

a) Докажите, что $f_h \in C^1$.

b) Верно ли, что $f_h \rightrightarrows f$?

c) Выразите $\mathcal{F}(f_h)$ через $\widetilde{f}$.

**Задача 6.** Пусть $f : \Sigma \times U \to \mathbb{C}$, $\Sigma \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{C}$, непрерывна по совокупности переменных и голоморфна по $z \in U$ в области $\{x\} \times U$ для каждого $x \in \Sigma$. Докажите, что тогда производная $\frac{\partial f}{\partial z}$ непрерывна по совокупности переменных в $\Sigma \times U$.

**Задача 7.** Пусть $\frac{\partial f}{\partial z}$ непрерывна. Выведите при этом предположении теорему о голоморфности несобственного интеграла, зависящего от параметра, из теоремы о дифференцированности под знаком интеграла и условий Коши-Римана.

**Задача 8.** Пусть функция $f$ ограничена, и $\operatorname{supp}(f) \subset \mathbb{R}_+ = \{x \geqslant 0\}$. Докажите, что преобразование Фурье функции $f$ голоморфно в нижней полуплоскости.

**Задача 9.** Докажите, что $\Gamma$ – функция Эйлера, заданная равенством

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx,$$

голоморфна в области $\operatorname{Re} z > 1$.