Занятие и задание 5

Задача 1. Вычислите преобразование Фурье $\widetilde{f}$ для

a) $f = \chi_{[-a,a]}$,

b) $f = \chi_{[0,2a]}$,

c) $f = x\chi_{[-1,1]}$,

d) $f = \sin(x)\chi_{[0,\pi]}$,

e) $f = e^{-ax}\chi_{\mathbb{R}^+}$, $a > 0$,

f) $f = e^{-a|x|}$,

g^*) $f = \frac{\sin ax}{x}$.

Задача 2. Пусть Δ_n — δ-образная последовательность.

a) Найдите предел $\widetilde{\Delta_n}$ при $n \to \infty$.

b) Будет ли последовательность $\widetilde{\Delta_n}$ сходиться равномерно на всём $\mathbb{R}$?

Задача 3. Что можно сказать о $\widetilde{f}$, если f

a) чётна,

b) нечётна.

Задача 4. Пусть P — многочлен без вещественных корней.

a) Докажите, что преобразование Фурье функции $1/P$ дифференцируемо везде кроме, возможно, начала координат.

b^*) Докажите, что оно дифференцируемо бесконечное число раз везде кроме, возможно, начала координат.

c^{**}) Что можно сказать о производных этой функции в начале координат?

Задача 5*. Пусть $K(x, y)$ — финитная непрерывная функция двух переменных. Докажите, что оператор $f(x) \to \int_{\mathbb{R}} f(y)K(x, y)dx$ будет *компактным* (переводящим ограниченные множества во вполне ограниченные)

a^*) как оператор $C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$,

b^{**}) как оператор $L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$.